CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

CZERWIEC 2017

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Numer zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	D	B	B	C	B

Klucz punktowania zadania kodowanego

Zadanie 6. (0–2)

2	2	5

Schematy oceniania zadań otwartych

Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0 .$$

I sposób rozwiązania

Przekształcamy nierówność równoważnie w następujący sposób

$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6x + 9 \geq 0 ,$$

$$(2x - y)^2 + (x + 3)^2 \geq 0 .$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą składników nieujemnych, więc suma ta jest nieujemna dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci, z której lewą stronę łatwo można zapisać w postaci sumy składników nieujemnych: $4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6x + 9 \geq 0$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(2x - y)^2 + (x + 3)^2 \geq 0$ i nie uzasadni prawdziwości tej nierówności.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Przekształcamy nierówność do postaci $5x^2 + (6 - 4y)x + y^2 + 9 \geq 0$ i wprowadzamy funkcję kwadratową $f(x) = 5x^2 + (6 - 4y)x + y^2 + 9$ z parametrem y. Wystarczy teraz pokazać, że funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne dla każdej wartości parametru y. Ramiona paraboli są zwrócone do góry, więc powyższy warunek będzie spełniony, gdy wyróżnik trójmianu będzie niedodatni.

Obliczamy $\Delta = (6-4y)^2 - 20(y^2+9) = -4y^2 - 48y - 144 = -4(y+6)^2$.

Otrzymany wyróżnik jest mniejszy lub równy 0, więc funkcja f dla każdej wartości parametru y przyjmuje wartości nieujemne, a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze funkcję $f(x) = 5x^2 + (6-4y)x + y^2 + 9$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze wyróżnik w postaci $\Delta = -4(y+6)^2$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest niedodatnie.

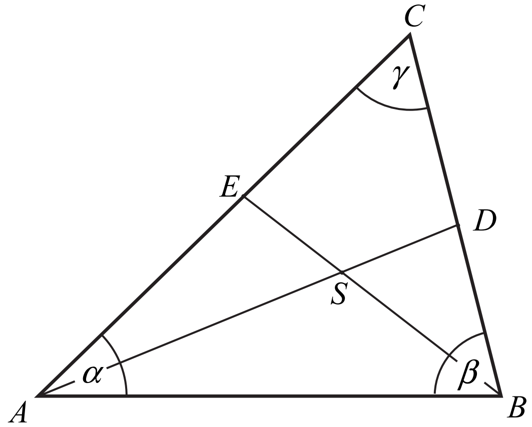
Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga
Zdający może rozpatrywać funkcję argumentu y z parametrem x, jak również ułożyć oraz rozwiązać nierówność $\Delta \le 0$ (wtedy za ułożenie nierówności $-4y^2 - 48y - 144 \le 0$ otrzymuje **2 punkty**, a za jej rozwiązanie **3 punkty**).

Zadanie 8. (0–3)

Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

I sposób rozwiązania

Ponieważ S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąta ABC, więc półproste AS i BS to dwusieczne kątów BAC i ABC tego trójkąta. Zatem

$$|\sphericalangle BAS| = \frac{\alpha}{2} \text{ i } |\sphericalangle ABS| = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem $|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Kąty ASB i DSE są wierzchołkowe, więc

$$|\sphericalangle DSE| = |\sphericalangle ASB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Suma miar kątów DSE i DCE czworokąta $DCES$ jest równa

$$|\sphericalangle DSE| + |\sphericalangle DCE| = \left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \gamma,$$

ale z założenia $\alpha + \beta = 2\gamma$, więc

$$|\sphericalangle DSE| + |\sphericalangle DCE| = 180^\circ - \frac{2\gamma}{2} + \gamma = 180^\circ,$$

co oznacza, że $|\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle SEC| = 180^\circ$, więc na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Ponieważ S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąta ABC, więc półproste AS i BS to dwusieczne kątów BAC i ABC tego trójkąta. Zatem

$$|\sphericalangle EAS| = \frac{\alpha}{2} \text{ i } |\sphericalangle DBS| = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem $|\sphericalangle AEB| = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}$ oraz $|\sphericalangle ADB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Kąty SEC i SDC to kąty przyległe do kątów odpowiednio AEB i ADB, więc

$$|\sphericalangle SEC| = 180^\circ - |\sphericalangle AEB| = 180^\circ - \left(180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

oraz

$$|\sphericalangle SDC| = 180° - |\sphericalangle ADB| = 180° - \left(180° - \frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{\alpha}{2} + \beta .$$

Suma miar kątów *SEC* i *SDC* czworokąta *DCES* jest równa

$$|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{3}{2}(\alpha + \beta).$$

ale z założenia $\alpha + \beta = 2\gamma$, więc

$$|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = \frac{3}{2}(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \cdot 2\gamma = 3\gamma .$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa $180°$, więc $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Stąd i z założenia wynika, że $\gamma = 180° - 2\gamma$, więc $3\gamma = 180°$, czyli $\gamma = 60°$. W rezultacie

$$|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = 3\gamma = 3 \cdot 60° = 180° .$$

Stąd z kolei wynika, że $|\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle SEC| = 180°$, więc na czworokącie *DCES* można opisać okrąg. To kończy dowód.

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- wyznaczy kąt *ASB* w zależności od α i β: $|\sphericalangle ASB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

albo

- wyznaczy kąt *AEB* w zależności od α i β: $|\sphericalangle AEB| = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2}$,

albo

- wyznaczy kąt *ADB* w zależności od α i β: $|\sphericalangle ADB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta$,

albo

- wyznaczy miarę kąta *ACB*: $\gamma = 60°$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy

- wyznaczy sumę miar kątów *DSE* i *DCE* czworokąta *DCES* zależności od α, β i γ:
  $|\sphericalangle DSE| + |\sphericalangle DCE| = \left(180° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \gamma$

albo

- wyznaczy sumę miar kątów *SDC* i *SEC* czworokąta *DCES* zależności od α, β oraz wyznaczy miarę kata γ: $|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$ i $\gamma = 60°$,

albo

- wyznaczy miarę kąta *ACB* oraz miarę kąta *DSE*: $\gamma = 60°$, $|\sphericalangle DSE| = |\sphericalangle ASB| = 120°$

i na tym zakończy lub nie uzasadni tezy poprawnie.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–4)

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Przykładowe rozwiązanie

Liczba podzielna przez 15 jest podzielna przez 3 i przez 5. Aby z cyfr 0, 1, 2 utworzyć liczbę podzielną przez 5, ostatnią cyfrą tej liczby musi być 0. Aby ponadto liczba była podzielna przez 3, suma cyfr utworzonej liczby musi być podzielna przez 3. Mamy więc cztery przypadki:

- $1+1+1+0+0$ takich liczb jest 3: 11100, 11010, 10110.
- $2+2+2+0+0$ takich liczb jest 3: 22200, 22020, 20220.
- $1+1+2+2+0$ takich liczb jest 6: z czterech miejsc wybieramy dwa miejsca dla jedynek, na pozostałych wstawiamy dwójki.
- $1+2+0+0+0$ takich liczb 6: jedynkę wstawiamy na pierwszym miejscu, dwójkę na jednym z trzech pozostałych, lub na odwrót.

Razem mamy więc 18 liczb pięciocyfrowych, podzielnych przez 15, które można utworzyć dysponując jedynie cyframi 0, 1, 2.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze, że ostatnią cyfrą utworzonej liczby jest 0.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze, że są cztery możliwości uzyskania sumy cyfr podzielnej przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający poprawnie obliczy liczby liczb w co najmniej trzech z czterech wymienionych przypadków.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy, że jest 18 liczb pięciocyfrowych, podzielnych przez 15, które można utworzyć dysponując jedynie cyframi 0, 1, 2.

Uwaga

Jeżeli zdający pominie jeden przypadek i rozwiąże zadanie do końca otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 10. (0–5)
Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

I sposób rozwiązania
Oznaczmy przez q pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez r różnicę tego ciągu. Wówczas q, $q+r$, $q+2r$, … są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
Jednocześnie r jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, a q jego ilorazem, więc r, rq, rq^2, … są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
Z warunków zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} r + rq = 18 \\ \dfrac{2q+7r}{2} \cdot 8 = 124 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą:

Dla r		*dla q*
$7r^2 - 33r + 36 = 0$	lub	$2q^2 - 29q + 95 = 0$
$\Delta = 81$		$\Delta = 81$
$\sqrt{\Delta} = 9$		$\sqrt{\Delta} = 9$
$r = \frac{12}{7}$ lub $r = 3$		$q = 5$ lub $q = \frac{19}{2}$

Zatem

$$\begin{cases} r = \dfrac{12}{7} \\ q = \dfrac{19}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} r = 3 \\ q = 5 \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} r = 3 \\ q = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} r = \dfrac{12}{7} \\ q = \dfrac{19}{2} \end{cases}$$

Warunki zadania spełniają ciągi:
ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 5 i różnicy 3 oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5. Zatem $a_n = 3n + 2$ i $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

II sposób rozwiązania
Niech a_1 będzie pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, a r jego różnicą, zaś b_1 pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, a q jego ilorazem. Z warunków zadnia możemy zapisać:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 124 \\ b_1 \dfrac{1-q^2}{1-q} = 18 \\ a_1 = q \\ b_1 = r \end{cases}$$

W dalszej część rozwiązania postępujemy tak jak w I sposobie.

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania . ... 1 p.
Zdający

- zapisze kolejne wyrazy ciągów arytmetycznego i geometrycznego za pomocą r i q (lub a_1 i b_1 lub a_1 i r lub b_1 i q)

albo

- zapisze koniunkcję zależności $\frac{a_1+a_8}{2}\cdot 8=124$ i $b_1\frac{1-q^2}{1-q}=18$ dla $q\neq 1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.: $\begin{cases} r+rq=18 \\ \frac{2q+7r}{2}\cdot 8=124. \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności ....3 p.
Zdający przekształci układ równań do równania kwadratowego z jedna niewiadomą r lub q,
np.: $7r^2-33r+36=0$ lub $2q^2-29q+95=0$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający

- popełni błąd rachunkowy na etapie rozwiązywania układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca

albo

- poda jako rozwiązanie dwie pary ciągów: ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $\frac{19}{2}$ i różnicy $\frac{12}{7}$ oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $\frac{12}{7}$ i ilorazie $\frac{19}{2}$, oraz ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 5 i różnicy 3 oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający

- wyznaczy wzory ogólne ciągów $a_n=3n+2$ i $b_n=3\cdot 5^{n-1}$

albo

- wyznaczy ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 5 i różnicy 3 oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5.

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

I sposób rozwiązania

Korzystając ze wzoru redukcyjnego $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, możemy zapisać równanie w postaci równoważnej

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=1,$$

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1,$$

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=1,$$

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Zatem $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, gdzie k test liczbą całkowitą. Stąd

$$x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \text{ lub } x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi .$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ równanie ma więc dwa rozwiązania: $\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równanie w postaci $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający rozwiąże równanie w zbiorze liczb rzeczywistych: $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ lub $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wystarczy, że zdający zapisze $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Zdający rozwiąże równanie w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$: $x=\frac{5\pi}{12}$ lub $x=\frac{13\pi}{12}$.

Uwaga
Jeżeli zdający od razu wyznaczy rozwiązania równania z przedziału $\langle 0,2\pi\rangle$, to otrzymuje **4 punkty**.

II sposób rozwiązania
Korzystając ze wzorów na sinus różnicy i cosinus sumy kątów, otrzymujemy

$$3\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}=1,$$

$$3\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1,$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)=1,$$

$$\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=1,$$

$$\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Korzystając ze wzoru redukcyjnego $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Następnie, korzystając ze wzoru na różnicę funkcji trygonometrycznych $\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}$, równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

Zatem $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, gdzie k test liczbą całkowitą. Stąd

$$x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \text{ lub } x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi.$$

W przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$ równanie ma więc dwa rozwiązania: $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$.

Uwaga

Równanie $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ można rozwiązać w inny sposób.

Gdy $\sin x > \cos x$, to obie strony tego równania są dodatnie i wtedy, podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy równanie

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2},$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Zatem $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k test liczbą całkowitą. Stąd

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi .$$

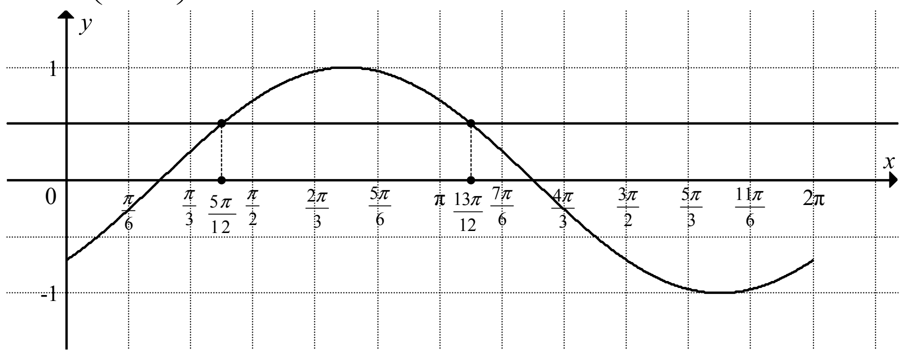
W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ są więc cztery takie liczby: $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{13\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{17\pi}{12}$.

Jednak tylko dla $x = \frac{\pi}{12}$ oraz dla $x = \frac{13\pi}{12}$ spełniony jest warunek $\sin x > \cos x$.

Zatem równanie $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$.

Uwaga

Rozwiązania równania $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ możemy odczytać z wykresu funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.



Są dwa takie argumenty: $x = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{13\pi}{12}$. Sprawdzamy, czy dla tych argumentów funkcja f przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{10\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równanie w postaci $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze, że równanie jest równoważne równaniu:

- $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

albo

- $\sin 2x = \frac{1}{2}$ przy warunku $\sin x > \cos x$.

Uwaga
Zdający może nie zapisywać warunku $\sin x > \cos x$. Wystarczy zapis, że wykorzystuje metodę analizy starożytnych lub sprawdzi otrzymane rozwiązania i odrzuci obce rozwiązania. Jeżeli nie zapisze, że wykorzystuje metodę analizy starożytnych i nie sprawdzi otrzymanych rozwiązań, a w konsekwencji nie odrzuci obcych rozwiązań, to za całe zadanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 3 p.

Zdający rozwiąże równanie

- $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ lub $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

albo

- $\sin 2x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Uwaga
Wystarczy, że zdający zapisze $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający rozwiąże równanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{5\pi}{12}$ lub $x = \frac{13\pi}{12}$ ($x = 75°$ lub $x = 195°$).

Uwaga
Jeżeli zdający od razu wyznaczy rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 12. (0–5)

Prosta l, na której leży punkt $P=(8,2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l.

I sposób rozwiązania

Niech szukana prosta l ma równanie kierunkowe $y=ax+b$. Możemy założyć, że $a<0$ i $b>0$.

Ponieważ punkt $P=(8,2)$ leży na prostej l, więc

$$8a+b=2.$$

Załóżmy, że prosta l przecina dodatnią półoś osi Ox w punkcie M, zaś dodatnią półoś osi Oy

w punkcie N. Wtedy $M=\left(-\frac{b}{a},0\right)$ i $N=(0,b)$. Ponieważ pole trójkąta OMN, gdzie $O=(0,0)$ jest równe 36, otrzymujemy zatem równanie

$$36=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot b,$$

Skąd $a=-\frac{b^2}{72}$. Po podstawieniu wyrażenia $-\frac{b^2}{72}$ w miejsce a do równania $8a+b=2$, równanie to przyjmuje postać

$$-\frac{b^2}{9}+b=2,$$

czyli

$$b^2-9b+18=0.$$

Równanie $b^2-9b+18=0$ ma dwa rozwiązania $b=3$ oraz $b=6$.

Jeżeli $b=3$, to $a=-\frac{1}{8}$. Jeżeli $b=6$, to $a=-\frac{1}{2}$. Są zatem dwie proste o następujących równaniach:

$$y=-\frac{1}{8}x+3 \text{ oraz } y=-\frac{1}{2}x+6.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze zależność wynikającą z faktu, że punkt $P=(8,2)$ leży na prostej o równaniu,
$y=ax+b$, np.

$$8a+b=2$$

albo

równanie opisującego dane pole trójkąta prostokątnego, np.

$$36=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot b$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi a i b

$$8a+b=2 \text{ i } 36=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot b$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający przekształci powyższy układ równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$-\frac{8b^2}{72}+b=2 \text{ lub } 36=-\frac{(2-8a)^2}{2a}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwagi
1. Zdający może rozciąć omawiany trójkąt prostokątny na prostokąt o bokach 8 i 2 oraz dwa trójkąty prostokątne o przyprostokątnych $y-2$ i 8 oraz $x-8$ i 2, gdzie $B=(0,\ y)$ i $A=(x,\ 0)$ są punktami przecięcia prostej o równaniu $y=ax+b$. Oczywiście $y>2$ i $x>8$. Otrzyma wtedy następujący układ równań

$$\frac{(x-8)\cdot 2}{2}+\frac{(y-2)\cdot 8}{2}=20 \text{ i } \frac{x\cdot y}{2}=36,$$

który po przekształceniu do równania z jedną niewiadomą ma postać

$$y+\frac{18}{y}=9 \text{ lub } \frac{288}{x}+x=36.$$

Wtedy za każde z równań otrzyma po **1 punkcie**, za układ równań **2 punkty**. Za równanie z jedną niewiadomą otrzymuje **3 punkty**.

2. Konstrukcja schematu pozostaje taka sama w przypadku, gdy zdający rozważa równość $8a+b=2$ i uzależnia współczynniki a i b od współrzędnych punktów na osiach, np. $A=(x,\ 0)$ i $B=(0,\ y)$. Wtedy $a=-\frac{72}{x^2}$ i $b=\frac{72}{x}$. Równanie $8a+b=2$ przyjmuje zatem postać $8\cdot\frac{-72}{x^2}+\frac{72}{x}=2$. Jego rozwiązaniami są liczby $x=12$ oraz $x=24$.
3. Jeżeli zdający wykorzysta wzór na odległość d prostej o równaniu $y=ax+b$ od punktu $O=(0,0)$, to długość odcinka AB, gdzie $A=(x,\ 0)$ i $B=(0,\ y)$, jest równa $|AB|=\sqrt{\left(\frac{8-2a}{a}\right)^2+(8-2a)^2}$, natomiast $d=\frac{|8a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$. Za każdy z tych zapisów otrzymuje **1 punkt**. Jeśli doprowadzi równanie $36=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|$ do równania z jedną niewiadomą, np. $72=\frac{|8a-2|}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\sqrt{\left(\frac{8-2a}{a}\right)^2+(8-2a)^2}$, to otrzymuje **3 punkty**. To równanie po przekształceniu jest równoważne równaniu $16a^2+10a+1=0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 4 p.
Zdający popełni błąd rachunkowy w którejkolwiek fazie rozwiązania zadania i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole szukanego przekroju tego ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający zapisze równania szukanych prostych: $y=-\frac{1}{8}x+3$ oraz $y=-\frac{1}{2}x+6$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznaczy współrzędne punktów przecięcia prostej o równaniu $y=ax+b$, na której leży dany punkt $P=(8,2)$, np. $A=(24,0)$ i $B=(0,3)$ lub $A=(12,0)$ i $B=(0,6)$ i nie poda równań obu prostych, to otrzymuje **4 punkty**. Jeżeli przy tym błędnie zapisze pary tych punktów, np. $A=(24,0)$ i $B=(0,6)$ lub poda współrzędne czterech punktów bez poprawnego uporządkowania, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Przyjęcie do obliczeń punktu $P=(2,8)$ traktujemy jako błąd nieuwagi. Takie rozwiązania oceniamy w skali **0–5**.
3. Jeżeli zdający odgadnie równanie którejkolwiek z prostych (rozważając lub nie rozkłady na czynniki liczby 72), to otrzymuje **1 punkt**.

II sposób rozwiązania
Załóżmy, że prosta l przecina dodatnie półosie układu współrzędnych w punktach $A=(a,0)$ i $B=(0,b)$, $a>0$, $b>0$. Wtedy jej równanie odcinkowe ma postać

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Ponieważ punkt $P=(8,2)$ leży na prostej l, więc $\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1$. Ponadto pole trójkąta ABO jest równe 36, gdzie O to punkt $O=(0,0)$, zatem $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=36$. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases}\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1\\ a\cdot b=72\end{cases}$$

Po przekształceniu pierwszego równania do postaci $2(4a+b)=a\cdot b$ zapisujemy układ w postaci równoważnej

$$\begin{cases}4b+a=36\\ a\cdot b=72\end{cases}$$

Teraz wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą $a=36-4b$. Po podstawieniu do równania drugiego uzyskuje ono postać

$$(36-4b)b=72 \text{ czyli } b^2-9b+18=0.$$

Równanie $b^2-9b+18=0$ ma dwa rozwiązania $b=6$ oraz $b=3$.
Jeżeli $b=6$, to $a=12$. Jeżeli $b=3$, to $a=24$.

Są zatem dwie takie proste – jedna o równaniu $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$, druga o równaniu $\frac{x}{24}+\frac{y}{3}=1$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający zapisze równanie opisujące dane pole trójkąta prostokątnego, np.

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=36$$

albo

równanie odcinkowe prostej przechodzącej przez punkt $P=(8,\ 2)$

$$\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań

$$\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\cdot a\cdot b=36$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający przekształci powyższy układ równań do równania kwadratowego, np.

$$(36-4b)\cdot b=72 \text{ lub } \frac{36-a}{4}\cdot a=72$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.
Zdający popełni błąd rachunkowy w którejkolwiek fazie rozwiązania zadania i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole szukanego przekroju tego ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający zapisze równania szukanych prostych: $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$ oraz $\frac{x}{24}+\frac{y}{3}=1$.

Zadanie 13. (0–6)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.

I sposób rozwiązania
Równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania, gdy $\Delta>0$.
Obliczamy wyróżnik: $\Delta=9m^2-4\left(2m^2+1\right)=m^2-4$
Rozwiązaniem nierówności $m^2-4>0$ są: $m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

Rozpatrujemy warunki: $\begin{cases} x_1<3 \\ x_2<3 \end{cases}$, które są równoważne warunkom $\begin{cases} x_1-3<0 \\ x_2-3<0 \end{cases}$
Warunki te są spełnione, gdy:
$x_1-3+x_2-3<0$ oraz $(x_1-3)\cdot(x_2-3)>0$
$x_1+x_2-6<0$ oraz $x_1x_2-3(x_1+x_2)+9>0$
Stosujemy wzory Viète'a:
$3m-6<0$ i $2m^2+1-3(3m)+9>0$
$3m<6$ i $2m^2-9m+10>0$, a stąd otrzymujemy $m<2$.
Wyznaczamy część wspólną warunków:
$m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ oraz $m<2$.
Warunki zadania są spełnione dla $m\in(-\infty,-2)$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. **Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$: $m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $\Delta\geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu układu nierówności $x_1-3+x_2-3<0$ oraz $(x_1-3)\cdot(x_2-3)>0$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje za
- zapisanie układu $\begin{cases} x_1<3 \\ x_2<3 \end{cases}$ w postaci $\begin{cases} x_1-3<0 \\ x_2-3<0 \end{cases}$

3 punkty zdający otrzymuje za
- zapisanie układu nierówności $x_1-3+x_2-3<0$ oraz $(x_1-3)\cdot(x_2-3)>0$
  w postaci układu nierówności z niewiadomą *m*, np. $3m<6$ i $2m^2-9m+10>0$.

Uwaga. Jeżeli zdający zapisze układ $\begin{cases} x_1 - 3 < 0 \\ x_2 - 3 < 0 \end{cases}$ i jedną z nierówności $3m < 6$ albo $2m^2 - 9m + 10 > 0$, to otrzymuje **2 punkty** za II etap.

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie układu nierówności: $m < 2$.

Rozwiązanie pełne *(trzy etapy)* ....**6 pkt**
Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m \in (-\infty, -2)$.

Uwaga
Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.

II sposób rozwiązania
Rozpatrujemy funkcję kwadratową $f(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 + 1$.
Aby obydwa rozwiązania podanego równania były mniejsze od 3, funkcja $f(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 + 1$ musi spełniać następujące warunki:

- $f(3) > 0$,
- $x_w < 3$,
- $y_w < 0$, który jest równoważny warunkowi $\Delta > 0$.

gdzie (x_w, y_w), to współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f*.
Rozpatrujemy warunki:

- $f(3) = 9 - 9m + 2m^2 + 1 > 0$,

  $2m^2 - 9m + 10 > 0$ i otrzymujemy $m \in (-\infty, 2) \cup \left(2\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- $x_w < 3$, czyli $\frac{3m}{2} < 3$. Stąd otrzymujemy $m < 2$.
- $\Delta = 9m^2 - 4(2m^2 + 1) = m^2 - 4$

  $\Delta > 0$ gdy $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Warunki zadania są spełnione dla $m \in (-\infty, -2)$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. **Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu układu nierówności:
$f(3) > 0$ i $x_w < 3$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje za
- zapisanie układu warunków $f(3) > 0$ oraz $x_w < 3$

3 punkty zdający otrzymuje za
- zapisanie układu nierówności $f(3) > 0$ oraz $x_w < 3$ w postaci układu nierówności z niewiadomą *m*, np. $2m^2 - 9m + 10 > 0$ i $3m < 6$.

Uwaga. Jeżeli zdający zapisze układu warunków $f(3) > 0$ oraz $x_w < 3$ i jedną z nierówności $3m < 6$ albo $2m^2 - 9m + 10 > 0$, to otrzymuje **2 punkty** za II etap.
4 punkty zdający otrzymuje za
- rozwiązanie układu nierówności: $m < 2$.

Rozwiązanie pełne *(trzy etapy)* **..6 pkt**
Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m \in (-\infty, -2)$.

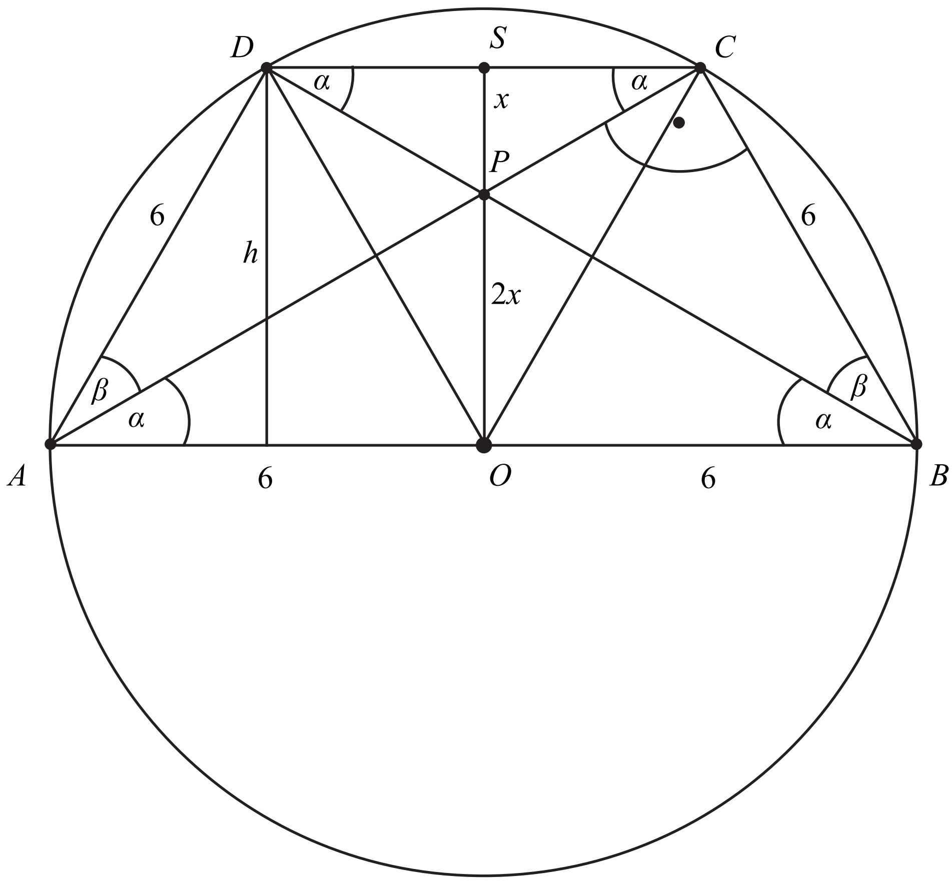
Uwaga
Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.

Zadanie 14. (0–6)

Trapez równoramienny *ABCD* o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa *AB* trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne *AC* i *BD* trapezu przecinają się w punkcie *P*. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt *ABP*.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Przyjmujemy, że $\sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO = \alpha$.

Kąty *CAO* i *ACD* są naprzemianległe, podobnie jak kąty *DBO* i *BDC*.

Zatem $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = \alpha$.

Odcinek *AB* jest średnicą okręgu, zatem $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Trapez *ABCD* jest wpisany w okrąg. Stąd $\alpha + \beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$, czyli $2\alpha + \beta = 90^\circ$ (*).

Ponadto trójkąt *AOD* jest równoboczny, zatem $\alpha + \beta = 60^\circ$ (**).

Z warunków (*) i (**) wynika, że $\alpha = \beta = 30^\circ$.

Wysokość *h* trapezu jest równocześnie wysokością trójkąta równobocznego o boku 6.

Zatem $h = 3\sqrt{3}$.

Trójkąty *ABP* i *CDP* są podobne, bo kąty *APB* i *CPD* są wierzchołkowe, a pozostałe kąty w tych trójkątach mają miarę 30°. Skalę podobieństwa wyznacza stosunek $\frac{|AB|}{|CD|}=2$, bo trójkąt ACD jest równoramienny i $|CD|=|AD|=6$.

Zatem $|PO|=\frac{2}{3}h=2\sqrt{3}$.

Wyznaczmy długości odcinków *AP* i *BP*. $|AP|=|BP|=\frac{2}{3}|AC|=\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Obliczamy pole trójkąta *ABP*.

$$P_{ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|PO|=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$$

Wykorzystamy zależność między polem trójkąta, jego obwodem i promieniem okręgu wpisanego w trójkąt.

$$12\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+12}{2}\cdot r.$$

Stąd $r=12-6\sqrt{3}$.

Obliczamy pole koła wpisanego w trójkąt *ABP*.

$$P=\pi r^2=\pi\left(12-6\sqrt{3}\right)^2=\left(252-144\sqrt{3}\right)\pi.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze, że $\alpha=\beta=30^\circ$

albo

- zapisze, że trójkąty *ABP* i *CDP* są podobne.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy wysokość trapezu: $h=3\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający obliczy pole trójkąta *ABP*: $P_{ABP}=12\sqrt{3}$.

Uwaga. Jeżeli zdający

- obliczy wysokość trójkąta *ABP*: $|PO|=2\sqrt{3}$

lub

- obliczy długości boków trójkąta ABP: $|PO| = 2\sqrt{3}$, $|AP| = |BP| = 4\sqrt{3}$,

to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy promień koła wpisanego w trójkąt ABP: $r = 12 - 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy pole koła wpisanego w trójkąt ABP: $P = \left(252 - 144\sqrt{3}\right)\pi$.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy $1:2$ oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość krótszej z tych dwóch krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka, których stosunek długości jest równy $1:2$, wtedy druga z tych krawędzi ma długość $2x$, natomiast długość trzeciej krawędzi tego prostopadłościanu jest równa $\frac{8}{x\cdot 2x}=\frac{4}{x^2}$. Pole powierzchni całkowitej jest równe

$$P_c(x)=2\cdot x\cdot 2x+2\cdot x\cdot\frac{4}{x^2}+2\cdot 2x\cdot\frac{4}{x^2}=4x^2+\frac{24}{x}.$$

Z założenia wynika, że $x>0$ oraz $4x+4\cdot 2x+4\cdot\frac{4}{x^2}<28$. Stąd

$$3x+\frac{4}{x^2}<7,$$

$$3x^3-7x^2+4<0.$$

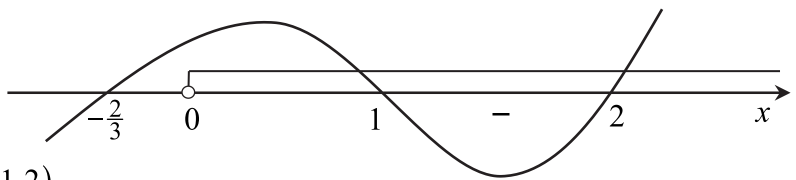
Zauważmy, że jednym z pierwiastków wielomianu jest 1, gdyż $3\cdot 1^3-7\cdot 1^2+4=0$. Stąd wynika, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x-1$. Dzieląc, np. za pomocą schematu Hornera, otrzymujemy

	3	−7	0	4
1	3	−4	−4	0

Zatem nierówność możemy zapisać w postaci

$$(x-1)\left(3x^2-4x-4\right)<0.$$

Pierwiastkami trójmianu $3x^2-4x-4$ są liczby 2 i $-\frac{2}{3}$.



Zatem $x\in(1,2)$.

Pochodna funkcji P_c jest równa

$$P_c'(x)=8x-\frac{24}{x^2}=\frac{8}{x^2}\cdot\left(x^3-3\right)=\frac{8}{x^2}\cdot\left(x-\sqrt[3]{3}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9}\right)\text{ dla } x\in(1,2).$$

Ponieważ $\frac{8}{x^2}\left(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9}\right)>0$ dla każdej liczby $x\in(1,2)$, więc

$P_c'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-\sqrt[3]{3}=0$ i $x\in(1,2)$, czyli gdy $x=\sqrt[3]{3}$,

$P_c'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-\sqrt[3]{3}>0$ i $x\in(1,2)$, czyli gdy $x\in\left(\sqrt[3]{3},2\right)$,

$P_c'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-\sqrt[3]{3}<0$ i $x\in(1,2)$, czyli gdy $x\in\left(1,\sqrt[3]{3}\right)$.

Zatem w przedziale $\left(1,\sqrt[3]{3}\right\rangle$ funkcja P_c jest malejąca, w przedziale $\left\langle\sqrt[3]{3},2\right)$ jest rosnąca, a w punkcie $x=\sqrt[3]{3}$ osiąga minimum lokalne, które jest zarazem najmniejszą wartością tej funkcji.

Gdy $x=\sqrt[3]{3}$, to $2x=2\sqrt[3]{3}$ oraz $\frac{4}{x^2}=\frac{4}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$.

Odpowiedź. $P_c\left(x\right)=4x^2+\frac{24}{x}$ dla $x\in\left(1,2\right)$. Najmniejsze pole powierzchni całkowitej, spośród rozpatrywanych, ma prostopadłościan o wymiarach $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:
  a) zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu w zależności od zmiennej *x*, (długość krótszej z tych dwóch krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka, których stosunek długości jest równy $1:2$), druga z tych krawędzi ma długość $2x$, natomiast długość trzeciej krawędzi tego prostopadłościanu jest równa $\frac{4}{x^2}$,
  b) zapisanie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcji zmiennej *x*:
  $$P_c\left(x\right)=2\cdot x\cdot 2x+2\cdot x\cdot\frac{4}{x^2}+2\cdot 2x\cdot\frac{4}{x^2}=4x^2+\frac{24}{x},$$
  c) określenie dziedziny funkcji *P*: $\left(1,2\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**. Jeśli zdający od razu zapisze pole powierzchni całkowitej w zależności od zmiennej *x*, to otrzymuje 1 punkt za część a) i 1 punkt za część b).

- **Drugi etap** składa się z trzech części:
  a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej $f\left(x\right)=4x^2+\frac{24}{x}$: $f'\left(x\right)=8x-\frac{24}{x^2}$,
  b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x=\sqrt[3]{3}$,
  c) uzasadnienie, że dla $x=\sqrt[3]{3}$ funkcja P_c osiąga najmniejszą wartość, np. zapisanie, że w przedziale $\left(1,\sqrt[3]{3}\right\rangle$ funkcja P_c jest malejąca, w przedziale $\left\langle\sqrt[3]{3},2\right)$ jest rosnąca, a w punkcie osiąga minimum lokalne, które jest więc najmniejszą wartością tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga
Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *P*, np. $x\in\left(1,2\right)$, to za trzecią część drugiego etapu może otrzymać **1 punkt** tylko wtedy, gdy obliczy długości wszystkich trzech krawędzi szukanego prostopadłościanu i sprawdzi, że suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28.

- **Trzeci etap**
  Obliczenie długości krawędzi prostopadłościanu o najmniejszym polu powierzchni całkowitej: $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

II sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość krótszej z tych dwóch krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka, których stosunek długości jest równy $1:2$, wtedy druga z tych krawędzi ma długość $2x$. Przyjmijmy, że h oznacza wysokość tego prostopadłościanu. Objętość prostopadłościanu jest równa 8, więc $x\cdot 2x\cdot h=8$. Stąd $x=\frac{2}{\sqrt{h}}=\frac{2\sqrt{h}}{h}$

Pole powierzchni całkowitej jest równe

$$P_c=2\cdot x\cdot 2x+2\cdot x\cdot h+2\cdot 2x\cdot h,$$

$$P_c=4x^2+6xh,$$

$$P_c=4\left(\frac{2\sqrt{h}}{h}\right)^2+6\cdot\frac{2\sqrt{h}}{h}\cdot h,$$

$$P_c(h)=\frac{16}{h}+12\sqrt{h}.$$

Z założenia wynika, że $h>0$ oraz $4x+4\cdot 2x+4h<28$, stąd

$$12\cdot\frac{2}{\sqrt{h}}+4h<28,$$

$$\frac{6\sqrt{h}}{h}+h<7,$$

$$h^2-7h+6\sqrt{h}<0.$$

Aby rozwiązać nierówność, podstawmy $\sqrt{h}=t$ i $t>0$.

Zapisujemy nierówność w postaci $t^4-7t^2+6t<0$.

Przekształcamy do postaci równoważnej $t\left(t^3-7t+6\right)<0$ i $t>0$. Zatem $t^3-7t+6<0$.

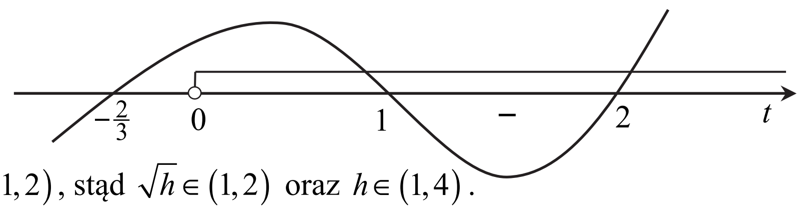
Zauważmy, że jednym z pierwiastków wielomianu jest 1, gdyż $3\cdot 1^3-7\cdot 1^2+4=0$. Stąd wynika, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $t-1$. Dzieląc, np. za pomocą schematu Hornera, otrzymujemy

	3	−7	0	4
1	3	−4	−4	0

Zatem nierówność możemy zapisać w postaci

$$(t-1)\left(3t^2-4t-4\right)<0.$$

Pierwiastkami trójmianu $3t^2-4t-4$ są liczby 2 i $-\frac{2}{3}$.



Zatem $t\in(1,2)$, stąd $\sqrt{h}\in(1,2)$ oraz $h\in(1,4)$.

Pochodna funkcji P_c jest równa

$$P_c'(h)=-\frac{16}{h^2}+\frac{12}{2\sqrt{h}}=-\frac{16}{h^2}+\frac{6\sqrt{h}}{h}=\frac{6h\sqrt{h}-16}{h^2}\ \text{ dla } h\in(1,4).$$

Ponieważ $h^2>0$ dla każdej liczby $h\in(1,4)$, więc $P_c'(h)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$6h\sqrt{h}-16=0$ i $h\in(1,4)$, czyli $h\sqrt{h}=\frac{8}{3}$ gdy $h=\sqrt[3]{\frac{64}{9}}=\frac{4}{\sqrt[3]{9}}$,

$P_c'(h) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6h\sqrt{h} - 16 > 0$ i $h \in (1,4)$, czyli gdy $h \in \left(\frac{4}{\sqrt[3]{9}}, 4\right)$,

$P_c'(h) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6h\sqrt{h} - 16 < 0$ i $h \in (1,4)$, czyli gdy $h \in \left(1, \frac{4}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

Zatem w przedziale $\left(1, \frac{4}{\sqrt[3]{9}}\right\rangle$ funkcja P_c jest malejąca, w przedziale $\left\langle \frac{4}{\sqrt[3]{9}}, 1\right)$ jest rosnąca, a w punkcie $h = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$ osiąga minimum lokalne, które jest zarazem najmniejszą wartością tej funkcji.

Gdy $h = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$, to $x = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{\sqrt[3]{9}}}} = \frac{2}{\frac{2}{\sqrt[6]{9}}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$ oraz $2x = 2\sqrt[3]{3}$.

Odpowiedź. $P_c(h) = \frac{16}{h} + 12\sqrt{h}$ dla $h \in (1,4)$. Najmniejsze pole powierzchni całkowitej, spośród rozpatrywanych, ma prostopadłościan o wymiarach $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{4}{\sqrt[3]{9}}$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:
    a) zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu w zależności od zmiennej *x*, (długość krótszej z tych dwóch krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka, których stosunek długości jest równy $1:2$), druga z tych krawędzi ma długość $2x$, natomiast długość trzeciej krawędzi tego prostopadłościanu jest równa h oraz zapisanie zależności $x = \frac{2}{\sqrt{h}} = \frac{2\sqrt{h}}{h}$,
    b) zapisanie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcji zmiennej h:
    $$P_c = 4\left(\frac{2\sqrt{h}}{h}\right)^2 + 6 \cdot \frac{2\sqrt{h}}{h} \cdot h = \frac{16}{h} + 12\sqrt{h},$$
    c) określenie dziedziny funkcji P: $(1,4)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**. Jeśli zdający od razu zapisze pole powierzchni całkowitej w zależności od zmiennej *x*, to otrzymuje 1 punkt za część a) i 1 punkt za część b).

- **Drugi etap** składa się z trzech części:
    a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej
    $$P_c'(h) = -\frac{16}{h^2} + \frac{12}{2\sqrt{h}} = -\frac{16}{h^2} + \frac{6\sqrt{h}}{h} = \frac{6h\sqrt{h} - 16}{h^2},$$
    b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $h = \sqrt[3]{\frac{64}{9}} = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$,

c) uzasadnienie, że dla $h = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$ funkcja P_c osiąga najmniejszą wartość, np. zapisanie, że w przedziale $\left(1, \frac{4}{\sqrt[3]{9}}\right\rangle$ funkcja P_c jest malejąca, w przedziale $\left\langle \frac{4}{\sqrt[3]{9}}, 1\right)$ jest rosnąca, a w punkcie osiąga minimum lokalne, które jest więc najmniejszą wartością tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *P*, np. $h \in (1,4)$, to za trzecią część drugiego etapu może otrzymać **1 punkt** tylko wtedy, gdy obliczy długości wszystkich trzech krawędzi szukanego prostopadłościanu i sprawdzi, że suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28.

- **Trzeci etap**

Obliczenie długości krawędzi prostopadłościanu o najmniejszym polu powierzchni całkowitej: $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{4}{\sqrt[3]{9}}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.