PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2018/2019

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg). 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	**D**

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	**C**

Zadanie 3. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg). SZKOŁA PODSTAWOWA 3.4. Liczby całkowite. Zdający wyznacza wartość bezwzględną liczby całkowitej.	**B**

Zadanie 4. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).	**D**

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.	**B**

Zadanie 6. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. GIMNAZJUM 6.3. Wyrażenia algebraiczne. Zdający redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej.	**A**

Zadanie 7. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.2. Równania i nierówności. Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. GIMNAZJUM 7.6. Równania. Zdający rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.	**A**

Zadanie 8. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.7. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.	**B**

Zadanie 9. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.	**A**

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.6. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.	**B**

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.	**A**

Zadanie 12. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.7. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	**D**

Zadanie 13. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	**C**

Zadanie 14. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.2. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.	**C**

Zadanie 15. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.3. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).	**A**

Zadanie 16. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	**B**

Zadanie 17. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.	**D**

Zadanie 18. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów. GIMNAZJUM 10.2. Figury płaskie. Zdający rozpoznaje wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznaje styczną do okręgu.	**C**

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.3. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa […] do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.	**D**

Zadanie 20. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. GIMNAZJUM 10.2. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.	**A**

Zadanie 21. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.1. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	**B**

Zadanie 22. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość […] stożka […] (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).	**B**

Zadanie 23. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	GIMNAZJUM 11.1. Bryły. Zdający rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy.	**C**

Zadanie 24. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	**D**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 25. (0–2)

Rozwiąż nierówność $(2x-3)^2-4 \geqslant 0$.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

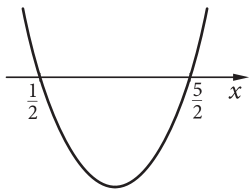
Porządkujemy nierówność kwadratową i otrzymujemy $4x^2-12x+5 \geqslant 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2-12x+5$:

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64$, a następnie jego pierwiastki:

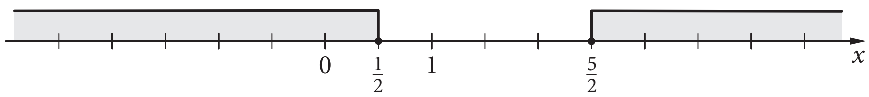
$x_1 = \frac{12-8}{8} = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{12+8}{8} = \frac{5}{2}$.

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego, uwzględniając obliczone pierwiastki i odpowiedni zwrot ramion paraboli:



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności na jeden z podanych sposobów:

- $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$
- $x \leqslant \frac{1}{2}$ lub $x \geqslant \frac{5}{2}$
- graficznie z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



II sposób

Przekształcamy nierówność kwadratową do postaci równoważnej $(2x-3)^2 \geqslant 4$ i dalej do postaci alternatywy dwóch nierówności liniowych: $2x-3 \geqslant 2$ lub $2x-3 \leqslant -2$ (lub nierówności $|2x-3| \geqslant 2$). Rozwiązujemy każdą z nierówności i otrzymujemy rozwiązanie, np. w postaci: $x \geqslant \frac{5}{2}$ lub $x \leqslant \frac{1}{2}$.

III sposób

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$(2x-3)^2 - 4 = (2x-3-2)(2x-3+2) = 4\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Zatem nierówność

$(2x-3)^2 - 4 \geqslant 0$ zachodzi dla $x \geqslant \frac{5}{2}$ oraz dla $x \leqslant \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy:

- obliczy pierwiastki trójmianu $y = 4x^2 - 12x + 5$: $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze rozwiązanie nierówności

albo

- obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu z błędami i konsekwentnie rozwiąże nierówność kwadratową

albo

- przekształci nierówność do postaci alternatywy: $2x - 3 \geqslant 2$ lub $2x - 3 \leqslant -2$, a następnie rozwiąże poprawnie jedną z nich $x \geqslant \frac{5}{2}$ lub $x \leqslant \frac{1}{2}$

albo

- przekształci nierówność do postaci $|2x - 3| \geqslant 2$

albo

- skorzysta ze wzoru na różnicę kwadratów $(2x-3)^2 - 2^2$ i przekształci nierówność do postaci: $4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie zbiór rozwiązań nierówności.

Zadanie 26. (0–2)

Dla kąta ostrego α dany jest $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6.4. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. 6.5. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

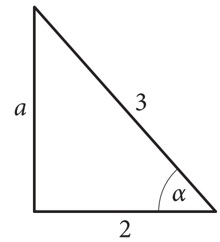
Obliczamy wartość $\sin\alpha$, korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz z informacji o tym, że kąt α jest ostry. Otrzymujemy $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Obliczamy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Wartość wyrażenia $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$ jest zatem równa $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

II sposób

Wykorzystujemy trójkąt prostokątny, w którym występuje taki kąt ostry α, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, np.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $a^2 + 2^2 = 3^2$, a stąd $a = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

Obliczamy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

a następnie wartość wyrażenia $\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$.

III sposób

Przekształcamy wyrażenie $\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$

do postaci $\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{|\cos\alpha|}$.

$\cos\alpha$ jest dodatni, więc $\frac{1}{|\cos\alpha|} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy:

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, popełni błąd przy obliczaniu wartości $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- obliczy długość przyprostokątnej α oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości przyprostokątnej a i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- przekształci wyrażenie $\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$ do postaci $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia $\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$ równą $\frac{3}{2}$.

Zadanie 27. (0–2)
Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 30 losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że obie wylosowane liczby są podzielne przez 3.

III. Modelowanie matematyczne.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Przykładowe rozwiązanie
W zbiorze liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 30 znajduje się $29 - 9 = 20$ liczb. Wśród nich liczby podzielne przez 3 to: 12, 15, 18, 21, 24, 27. Jest ich 6.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na dwukrotnym losowaniu liczb bez zwracania ze zbioru 20-elementowego jest równa $|\Omega| = 20 \cdot 19 = 380$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A to $|A| = 6 \cdot 5 = 30$.
W doświadczeniu mamy do czynienia z modelem klasycznym (zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne), a więc obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A, korzystając z definicji klasycznej: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{30}{380} = \frac{3}{38}$.

Uwaga
Obliczanie iloczynów $20 \cdot 19$ oraz $6 \cdot 5$ jest zbędne – ułamki można skracać:
$P(A) = \frac{6 \cdot 5}{20 \cdot 19} = \frac{3}{2 \cdot 19} = \frac{3}{38}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia $|\Omega| = 20 \cdot 19 = 380$ albo liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 6 \cdot 5 = 30$ (przy czym może je zostawić w postaci iloczynów).

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{3}{38}$.

Zadanie 28. (0–2)
W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są wyrazy $a_2 = -2$ i $a_5 = 7$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od piątego do dwudziestego.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Dane wyrazy ciągu arytmetycznego i zastosowanie wzoru na n-ty wyraz tego ciągu daje układ równań $\begin{cases} a_1 + r = -2 \\ a_1 + 4r = 7 \end{cases}$, z którego, po odjęciu równań stronami, otrzymujemy $3r = 9$. Rozwiązanie tego układu to $r = 3$ i $a_1 = -5$.

Sumę wyrazów tego ciągu od piątego do dwudziestego obliczamy, korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
Suma ta jest równa:
$S_{20} - S_4 = \frac{2\cdot(-5)+19\cdot 3}{2}\cdot 20 - \frac{2\cdot(-5)+3\cdot 3}{2}\cdot 4 = 47\cdot 10 - (-1)\cdot 2 = 470 + 2 = 472.$

<u>II sposób</u>
Dla ciągu arytmetycznego możemy zapisać równanie $a_2 + 3r = a_5$, czyli $-2 + 3r = 7$ i dalej $r = 3$.
Wyrazy od piątego do dwudziestego ciągu (a_n), których sumę należy obliczyć, można potraktować jako kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (b_n), w którym $b_1 = a_5 = 7$ i $b_{16} = a_{20} = a_5 + 15r = 7 + 15\cdot 3 = 52$.

Dla ciągu (b_n) obliczamy sumę $S_{16} = \frac{7+52}{2}\cdot 16 = 59\cdot 8 = 472$.

<u>III sposób</u>
Możemy zapisać równanie $a_2 + 3r = a_5$, czyli $-2 + 3r = 7$ i dalej $r = 3$.
Mamy obliczyć sumę: $a_5 + a_6 + ... + a_{20} = a_5 + (a_5 + r) + ... + (a_5 + 15r) =$
$= 16a_5 + (1 + 2 + ... + 15)r = 16\cdot 7 + \frac{15\cdot 16}{2}\cdot 3 = 112 + 45\cdot 8 = 472.$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy:

- obliczy $r = 3$ i $a_1 = 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu a_1 i r i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

albo

- obliczy $r = 3$ i poda $b_1 = a_5 = 7$

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu r i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy:

- obliczy sumę wyrazów tego ciągu (a_n) od piątego do dwudziestego (472)

albo

- obliczy sumę wyrazów ciągu (b_n) od pierwszego do szesnastego (472).

Zadania 29. (0–2)
Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej x prawdziwa jest nierówność

$$9x + \frac{1}{x} \leqslant -6.$$

V. Rozumowanie i argumentacja.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Niech x oznacza dowolna liczbę rzeczywistą ujemną. Mamy wykazać, że $9x + \frac{1}{x} \leqslant -6$. Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$9x + \frac{1}{x} + 6 \leqslant 0$$

$$\frac{9x^2 + 1 + 6x}{x} \leqslant 0$$

$$\frac{(3x+1)^2}{x} \leqslant 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, a iloraz liczby nieujemnej i liczby ujemnej jest liczbą rzeczywistą niedodatnią. A zatem równoważna jej teza też jest prawdziwa. To kończy dowód.

II sposób

Niech x oznacza dowolna liczbę rzeczywistą ujemną. Mamy wykazać, że $9x + \frac{1}{x} \leqslant -6$. Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$9x + \frac{1}{x} + 6 \leqslant 0$$

$$\frac{9x^2 + 1 + 6x}{x} \leqslant 0$$

$$\frac{(3x+1)^2}{x} \leqslant 0 \ |\cdot x, \ x < 0 \ \text{(z założenia)}$$

$$(3x+1)^2 \geqslant 0.$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. A zatem teza twierdzenia jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej.

III sposób

Niech x oznacza dowolna liczbę rzeczywistą ujemną. Mamy wykazać, że $9x + \frac{1}{x} \leqslant -6$. Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$9x + \frac{1}{x} + 6 \leqslant 0$$

$$\frac{9x^2 + 1 + 6x}{x} \leqslant 0 \ |\cdot x, \ x < 0 \ \ \text{(z założenia)}$$

$$9x^2 + 6x + 1 \geqslant 0$$

Rozwiązujemy otrzymaną nierówność kwadratową.
Obliczamy wyróżnik $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$ trójmianu $9x^2 + 6x + 1$ i pierwiastek podwójny: $x_0 = -\frac{6}{2 \cdot 9} = -\frac{1}{3}$. Najmniejsza wartość tej funkcji jest równa 0, a zatem nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej. A zatem teza twierdzenia jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej.

IV sposób

Przekształcamy lewą stronę danej nierówności:

$$\mathrm{L} = 9x + \frac{1}{x} = \frac{9x^2+1}{x} = \left(\frac{9x^2+1}{x} + 6\right) - 6 = \frac{(3x+1)^2}{x} - 6 \leqslant 0 - 6 = -6 = \mathrm{P}$$

Po przekształceniu otrzymujemy prawą stronę danej nierówności; znak nierówności możemy wstawić, gdyż $(3x+1)^2 \geqslant 0$ i $x < 0 \Rightarrow \frac{(3x+1)^2}{x} \leqslant 0$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy:

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{(3x+1)^2}{x} \leqslant 0$ albo $(3x+1)^2 \geqslant 0$

albo

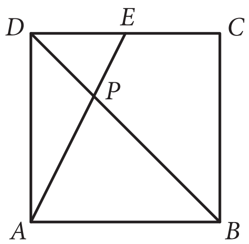
- zapisze nierówność w postaci równoważnej $9x^2 + 6x + 1 \geqslant 0$ i obliczy wyróżnik $\Delta = 0$ lub poda współrzędne wierzchołka paraboli.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód, uwzględniając informację o równoważnym przekształceniu tezy oraz wniosek wynikający z równoważności otrzymanego wyrażenia oraz tezy.

Zadanie 30. (0–3)

W kwadracie *ABCD*, w którym punkt *E* jest środkiem boku *CD*, poprowadzono przekątną *BD* i odcinek *AE*, które przecięły się w punkcie *P*. Uzasadnij, że suma pól trójkątów *ABP* i *DEP* stanowi $\frac{5}{12}$ pola kwadratu *ABCD*.

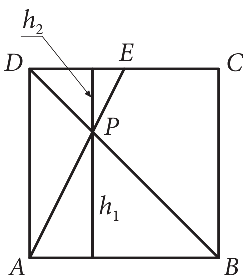


V. Rozumowanie i argumentacja.	7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. GIMNAZJUM 10.9. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Przyjmujemy oznaczenia a – długość boku kwadratu, h_1 – odległość punktu *P* od boku *AB*, h_2 – odległość punktu *P* od boku *CD*.



Możemy zapisać pola trójkątów *ABP* i *DEP* w postaci, $P_{ABP} = \frac{1}{2}a \cdot h_1$, $P_{DEP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_2$
oraz pole kwadratu $P_{ABCD} = a^2$.

Trójkąty ABP i DEP są podobne (na podstawie cechy kkk) w skali $k=2$ (lub w skali $k=\frac{1}{2}$), czyli $\frac{h_1}{h_2}=2$, a stąd mamy $h_1=\frac{2}{3}a$ i $h_2=\frac{1}{3}a$.

Suma pól trójkątów ABP i DEP jest więc równa

$$P_{ABP}+P_{DEP}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{12}a^2=\frac{4}{12}a^2+\frac{1}{12}a^2=\frac{5}{12}a^2=\frac{5}{12}\cdot P_{ABCD}$$

A zatem suma pól trójkątów ABP i DEP stanowi $\frac{5}{12}$ pola kwadratu.

<u>II sposób</u>

Trójkąty ABP i EDP są podobne, bo mają takie same kąty. Skala podobieństwa to $\frac{|AB|}{|ED|}=2$, więc $|BP|=2|DP|$, $|AP|=2|PE|$. Niech S będzie polem ΔEDP. Wtedy:

$P_{APD}=2P_{EDP}=2S$ – ta sama wysokość z wierzchołka D, podstawa 2 razy dłuższa,

$P_{ABP}=4S$ – skala podobieństwa,

$P_{ABCD}=2(P_{APD}+P_{ABP})=12S$ i $P_{EDP}+P_{ABP}=5S$.

Stąd teza.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zauważy podobieństwo trójkątów ABP i DEP i obliczy skalę podobieństwa.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy:

- zapisze pola trójkątów ABP i DEP w zależności od długości boku kwadratu a: $P_{ABP}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{3}a$ i $P_{DEP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}a$

albo

- zapisze pola trójkąta ABP oraz kwadratu $ABCD$ jako wielokrotności pola trójkąta DEP.

Zdający otrzymuje .... **3 pkt**

gdy uzasadni tezę.

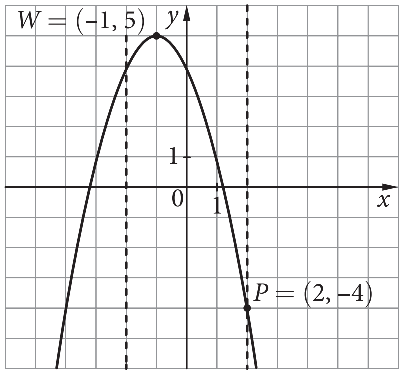
Zadania 31. (0–4)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeżeli wierzchołek paraboli, która jest jej wykresem, znajduje się w punkcie $W=(-1,5)$ oraz funkcja ta w przedziale $\langle -2,2\rangle$ osiąga najmniejszą wartość równą -4.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); 11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie $W=(-1,5)$, to wzór funkcji kwadratowej możemy zapisać w postaci kanonicznej $y=a\cdot(x+1)^2+5$.



Z informacji o wartości najmniejszej tej funkcji w przedziale $\langle -2,2\rangle$ wynika (np. na podstawie wykresu i analizy własności funkcji kwadratowej), że do wykresu funkcji należy punkt $P=(2,-4)$. Jego współrzędne spełniają więc powyższe równanie, a zatem otrzymujemy $-4=a\cdot(2+1)^2+5$, które doprowadzamy do postaci $-9=9a$.
Jego rozwiązaniem jest $a=-1$. Szukany wzór funkcji kwadratowej to $y=-(x+1)^2+5$.
Po przekształceniu go do postaci ogólnej otrzymujemy $y=-x^2-2x+4$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Zdający zapisze wzór funkcji kwadratowej w postaci $y=a\cdot(x+1)^2+5$

albo

- zauważy, że do wykresu funkcji należy punkt $P=(2,-4)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Zdający zapisze wzór funkcji kwadratowej w postaci $y=a\cdot(x+1)^2+5$ i zauważy, że do wykresu funkcji należy punkt $P=(2,-4)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Zdający wykorzysta punkt $P=(2,-4)$ i zapisze równanie $-4=a\cdot(2+1)^2+5$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

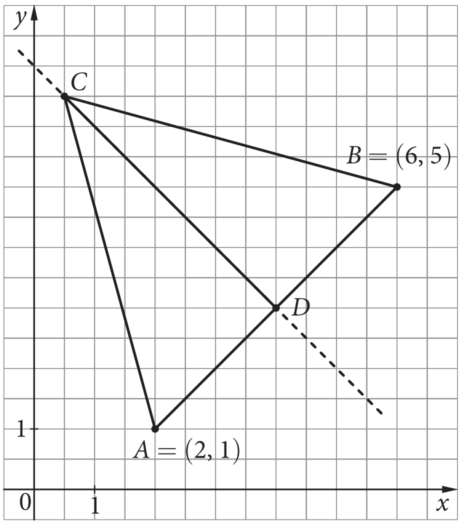
- Zdający wyznaczy z równania $a=-1$ i przekształci wzór funkcji do postaci ogólnej $y=-x^2-2x+4$.

Zadanie 32. (0–5)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są wierzchołki podstawy $A=(2,1)$ i $B=(6,5)$ oraz wysokość $|CD|=\frac{7\sqrt{2}}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka C, jeżeli wiadomo, że obie te współrzędne są dodatnie.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów.

Przykładowe rozwiązanie



Spodek wysokości D jest środkiem boku AB, a zatem jego współrzędne to: $D = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (4, 3)$.
Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $a_1 = \frac{5-1}{6-2} = 1$. Prosta CD jest do niej prostopadła, a więc jej współczynnik kierunkowy jest równy $a_2 = -1$ i przechodzi przez punkt $D = (4, 3)$. Równanie tej prostej możemy zapisać w postaci kierunkowej $y = -x + b$ i dalej $3 = -4 + b$, $b = 7$, a stąd otrzymujemy $y = -x + 7$.
Do obliczenia współrzędnych wierzchołka C wykorzystujemy fakt, że leży on na prostej CD i jego odległość od punktu D jest dana.
Możemy oznaczyć współrzędne wierzchołka $C = (x, -x + 7)$ i wyznaczyć wysokość $|CD| = \sqrt{(x-4)^2 + (-x+7-3)^2}$.
Rozwiązujemy równanie $\frac{7}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-4)^2 + (-x+7-3)^2}$:

$$\frac{49}{2} = 2 \cdot (x-4)^2$$

$$\frac{49}{4} = (x-4)^2$$

$$x - 4 = \frac{7}{2} \text{ lub } x - 4 = -\frac{7}{2}$$

$$x = 7\frac{1}{2} \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

Wierzchołek C ma zatem współrzędne: $C = \left(7\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ lub $C = \left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$.

Warunek zadania spełnia tylko punkt $C = \left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$, a zatem jest on jedynym rozwiązaniem zadania.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Zdający wyznaczy współrzędne punktu $D = (4, 3)$

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej AB: $a_1 = \frac{5-1}{6-2} = 1$ i wyznaczy równanie prostej CD: $y = -x + 7$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Zdający wyznaczy współrzędne punktu $D = (4, 3)$ oraz obliczy współczynnik kierunkowy prostej A: $a_1 = \frac{5-1}{6-2} = 1$ i wyznaczy równanie prostej CD: $y = -x + 7$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

- Zdający zapisze współrzędne wierzchołka $C=(x,-x+7)$ i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{7}{\sqrt{2}}=\sqrt{(x-4)^2+(-x+7-3)^2}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania .... **4 pkt**

- Zdający rozwiąże równanie $\frac{49}{2}=2\cdot(x-4)^2$ i otrzyma dwa rozwiązania $x_1=7\frac{7}{2}$ lub $x_2=\frac{1}{2}$

albo

- rozwiąże zadanie do końca z usterkami rachunkowymi (także na wcześniejszych etapach).

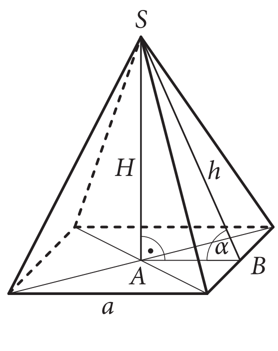
Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

- Zdający wyznaczy współrzędne wierzchołka $C=\left(7\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ lub $C=\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{2}\right)$ oraz uwzględni, że warunki zadania spełnia tylko wierzchołek $C=\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 33. (0–4)
W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym pole jednej ściany bocznej jest równe 12, a cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający: 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Przykładowe rozwiązanie
Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa, h – wysokość ściany bocznej i α – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
Rysunek:



W $\triangle ABS$ wyznaczamy $\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}a}{h}$, a następnie zapisujemy równanie $\frac{\frac{1}{2}a}{h}=\frac{1}{3}$, skąd otrzymujemy $h=\frac{3}{2}a$.
Wykorzystujemy wzór na pole ściany bocznej: $\frac{1}{2}a\cdot h=12$, z którego po podstawieniu $h=\frac{3}{2}a$, otrzymujemy $\frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{2}a=12$ i dalej $\frac{3}{4}a^2=12$, a stąd $a^2=16$, czyli $a=4$. Ponieważ $h=\frac{3}{2}a$, więc $h=6$.

Aby obliczyć wysokość H ostrosłupa, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABS. Otrzymujemy: $H^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=h^2$.

I dalej: $H^2+2^2=6^2$

$H^2=32$

$H=4\sqrt{2}$

Obliczamy objętość ostrosłupa: $V=\frac{1}{3}a^2\cdot H=\frac{1}{3}\cdot 16\cdot 4\sqrt{2}=\frac{64}{3}\sqrt{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający zapisze zależność pomiędzy długościami dwóch odcinków, wynikającą z podanej wartości cosinusa.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy $a=4$ lub wysokość ściany bocznej $h=6$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający zapisze twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABS: $H^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=h^2$ i obliczy wysokość ostrosłupa $H=4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa $V=\frac{64}{3}\sqrt{2}$.