PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
ODPOWIEDZI DO ARKUSZA PODSTAWOWEGO

Odpowiedzi do zadań testowych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	**B**	**B**	**D**	**B**	**C**	**A**	**C**	**D**	**B**	**D**	**A**	**D**
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
C	**B**	**A**	**A**	**C**	**B**	**C**	**B**	**A**	**D**	**A**	**C**	

Propozycje rozwiązań zadań otwartych:

Zadanie 26. (0-2)

Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

Rozwiązanie:
Po uporządkowaniu nierówność przyjmuje postać $12x^2 + 5x - 3 < 0$.

$\Delta = 169$, $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Nierówność jest spełniona dla $x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

Proponowana punktacja:
1 pkt – wyznaczenie miejsc zerowych odpowiedniego trójmianu
2 pkt – pełne rozwiązanie

Zadanie 27. (0-2)

Rozwiązanie:
Miara kąta wewnętrznego w pięciokącie foremnym jest równa 108°. Trójkąty ABC, AED i BCD są równoramienne, więc w szczególności miary kątów $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$ są równe 36°. Wobec tego $|\sphericalangle ADB| = 108° - 2 \cdot 36° = 36°$. W trójkątach ABD i BFA mamy zatem: przystające kąty $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle BAF$ oraz wspólny kąt przy wierzchołku B. Na mocy cechy (kąt, kąt) trójkąty te są podobne.

Proponowana punktacja:
1 pkt – wyznaczenie miary kąta ADB
2 pkt – pełne rozwiązanie

Zadanie 28. (0-2)

Rozwiązanie:
Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia mamy:
$253^4 - 123^4 = (253^2 - 123^2)(253^2 + 123^2) = (253 - 123)(253 + 123)(253^2 + 123^2) = 130 \cdot 376 \cdot (253^2 + 123^2)$.
Oczywiście $130 = 13 \cdot 10$, zatem dana liczba jest podzielna przez 13.

Proponowana punktacja:
1 pkt – zapisanie danej liczby w postaci $(253^2 - 123^2)(253^2 + 123^2)$
2 pkt – pełne rozwiązanie

Zadanie 29. (0-2)

<u>Odpowiedź:</u> nie istnieje

<u>Rozwiązanie:</u>

Załóżmy, że taki kąt istnieje. Z jedynki trygonometrycznej mamy: $\cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{49}$.

Zatem $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ lub $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$. Wobec tego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ lub $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$.

Oczywiście żadna z tych liczb nie jest równa $\sqrt{10}$, co oznacza, że nie istnieje kąt α spełniający podane warunki.

<u>Proponowana punktacja:</u>

1 pkt – wyznaczenie możliwych wartości $\cos\alpha$

2 pkt – wyznaczenie możliwych wartości $\operatorname{tg}\alpha$ i sformułowanie odpowiedzi

Zadanie 30. (0-2)

<u>Odpowiedź</u>: $x = \sqrt{3} - 1$

<u>Rozwiązanie:</u>

Podany ciąg jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 = x \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

Zatem, gdy $x = \frac{12-6\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} - 1$.

<u>Proponowana punktacja:</u>

1 pkt – zapisanie warunku $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 = x \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3}$

2 pkt – wyznaczenie $x = \sqrt{3} - 1$

Zadanie 31. (0-2)

<u>Odpowiedź</u>: $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$, $x > 4$

<u>Rozwiązanie:</u>

Z podanych informacji wynika, że $f(-2) = 2$, zatem $a^{-2} = 2$.

Stąd $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < \frac{1}{4}, \text{ czyli } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4.$$

Funkcja wykładnicza o podstawie $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest funkcją malejącą $\left(\text{bo } \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0;1)\right)$, zatem $x > 4$.

<u>Proponowana punktacja:</u>

1 pkt – wyznaczenie $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2 pkt – wyznaczenie $x > 4$

Zadanie 32. (0-5)

Odpowiedź: $S = (1; 9)$, $r = \sqrt{74}$

Rozwiązanie:

Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych jego boków. Symetralna boku AB ma równanie $x = 1$. Prosta AC ma równanie $y = 6x + 40$, środkiem odcinka AC jest punkt $D = (-5; 10)$, stąd symetralna boku AC ma równanie $y = -\frac{1}{6}x + \frac{55}{6}$.

Punktem przecięcia symetralnych jest punkt $S = (1; 9)$.

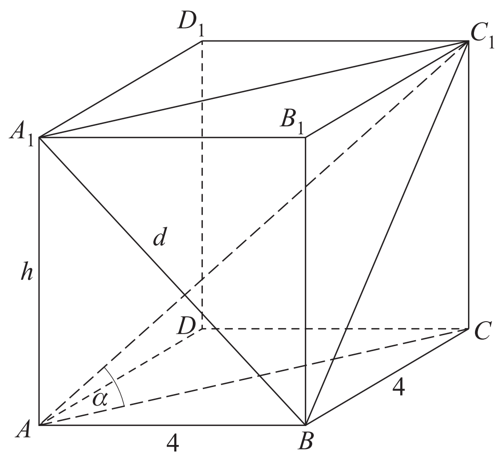
Promień okręgu ma długość równą długości np. odcinka AS, więc $r = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$.

Uwaga. *Promień można też obliczyć korzystając ze wzoru* $R = \frac{abc}{4P}$.

Proponowana punktacja:

1 pkt – zapisanie równania symetralnej boku AB: $x = 1$ lub wyznaczenie równania prostej AC lub wyznaczenie równania prostej BC
2 pkt – wyznaczenie równań: symetralnej boku AB i prostej AC lub BC
3 pkt – wyznaczenie równania symetralnej boku AC lub boku BC
4 pkt – wyznaczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na trójkącie ABC
5 pkt – wyznaczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC

Zadanie 33. (0-4)



Odpowiedź: $V = 32\sqrt{6}$, $\alpha \approx 39°$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: $|AA_1| = h$, $|BA_1| = |BC_1| = d$ (rys. obok).

Z tego, że $|\sphericalangle ABC| = 120°$ wynika, że $|AC| = 4\sqrt{3}$.
Trójkąt A_1BC_1 jest równoboczny (gdyż $|BA_1| = |BC_1|$ i $|\sphericalangle A_1BC_1| = 60°$), więc $d = 4\sqrt{3}$.

Wobec tego $h^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2 = 32$, czyli

$h = 4\sqrt{2}$.

Podstawa $ABCD$ ma pole powierzchni równe $4 \cdot 4 \cdot \sin 120° = 8\sqrt{3}$, stąd objętość

$V = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{6}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$.

Z tablic odczytujemy, że $\alpha \approx 39°$.

Proponowana punktacja:

1 pkt – wyznaczenie długości przekątnej AC
2 pkt – wyznaczenie długości wysokości graniastosłupa
3 pkt – wyznaczenie objętości graniastosłupa lub miary kąta α
4 pkt – pełne rozwiązanie

Zadanie 34. (0-4)

Odpowiedź: $\dfrac{32}{729}$

Rozwiązanie:

Wszystkich liczb czterocyfrowych, w zapisie których nie występuje 0 jest 9^4 .
Należy policzyć ile jest wszystkich liczb postaci *aaab*, *abaa*, *aaba* i *aaab*, gdzie $a \neq b$.
Liczb, w zapisie których występują dokładnie trzy 1 jest $8 \cdot 4$ (cyfra, która nie jest 1 może być wybrana na 8 sposobów i umieszczona na dowolnym z 4 miejsc). Tyle samo jest liczb, w zapisie których występują dokładnie trzy 2 itd. Ostatecznie wszystkich liczb spełniających podany warunek jest $9 \cdot 8 \cdot 4$.
Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 4}{9^4} = \dfrac{32}{729}$.

Proponowana punktacja:

1 pkt – wyznaczenie mocy zbioru zdarzeń elementarnych
2 pkt – wyznaczenie liczby liczb, w zapisie których występują dokładnie trzy 1 (lub 2 itd.)
3 pkt – wyznaczenie mocy zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających opisanemu zdarzeniu
4 pkt – wyznaczenie prawdopodobieństwa opisanego zdarzenia