PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
ODPOWIEDZI DO ARKUSZA ROZSZERZONEGO

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1	**2**	**3**	**4**
C	D	B	D

Zadanie 1 (0-1)

Dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\log\left(1 - \dfrac{6x+5}{3+2x}\right)}$ jest

A. $R - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ B. $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{6}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{6x+5}{3+2x} > 0 \\ 1 - \dfrac{6x+5}{3+2x} \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-4x-2}{3+2x} > 0 \\ \dfrac{6x+5}{3+2x} \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2x+1)(3+2x) < 0 \\ x \neq -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$x \in \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{6}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Odp. C.

Zadanie 2 (0-1)

Tworzymy liczby sześciocyfrowe biorąc sześć różnych cyfr ze zboru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ile jest wśród tych liczb takich, których ostatnia i pierwsza cyfra jest parzysta? Która z poniższych odpowiedzi jest <u>nieprawidłowa</u>?

A. $6!$ B. $\binom{3}{2} \cdot 2! \cdot \binom{5}{4} \cdot 4!$ C. $3! \cdot 5!$ D. $\binom{7}{6} \cdot 6!$

Rozwiązanie.
Cyfry parzyste na pierwszym i ostatnim miejscu można ustawić na $3 \cdot 2 = 3!$ sposobów.
Pozostałe cyfry na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ sposobów.

Zatem liczb takich jest $3! \cdot 5! = 6! = \binom{3}{2} \cdot 2! \cdot \binom{5}{4} \cdot 4!$

Odp. D.

Zadanie 3 (0-1)

Liczba $\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ jest równa

A. -8 B. -10 C. $-8\sqrt{2}$ D. $10\sqrt{2}$

Rozwiązanie.

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} = \sqrt{\left(4\sqrt{2} - 5\right)^2} - \sqrt{\left(4\sqrt{2} + 5\right)^2} = 4\sqrt{2} - 5 - \left(4\sqrt{2} + 5\right) = -10$$

Odp. B.

Zadanie 4 (0-1)

Ile z podanych niżej równań prostych są równaniami stycznych do wykresu funkcji

$$f(x) = x^3 + x^2 - x$$

1. $y = 1$,
2. $y = -\frac{5}{27}$,
3. $y = -x$,
4. $y = 4x - 3$?

A. dokładnie jedna B. dokładnie dwie C. dokładnie trzy D. 4

Rozwiązanie.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Sprawdzamy, czy dwa pierwsze równania mogą być równaniami stycznych.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$.

Ewentualne punkty styczności:

$f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1+3-9}{27} = -\frac{5}{27}$

$A = (-1, 1)$, $B = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right)$.

Zatem proste o równaniach $y = 1$, $y = -\frac{5}{27}$ są stycznymi odpowiednio w punktach A, B.

Sprawdzamy, czy trzecie równanie może być równaniem stycznej.

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = -\frac{2}{3}$.

Ewentualne punkty styczności:

$f(0) = 0$, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{-8+12+18}{27} = \frac{22}{27}$

$C = (0, 0)$, $D = \left(-\frac{2}{3}, \frac{22}{27}\right)$.

Zatem prosta o równaniu $y = -x$ jest styczną w punkcie C.

Sprawdzamy, czy czwarte równanie może być równaniem stycznej.

$f'(x) = 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ lub $x = -\frac{5}{3}$.

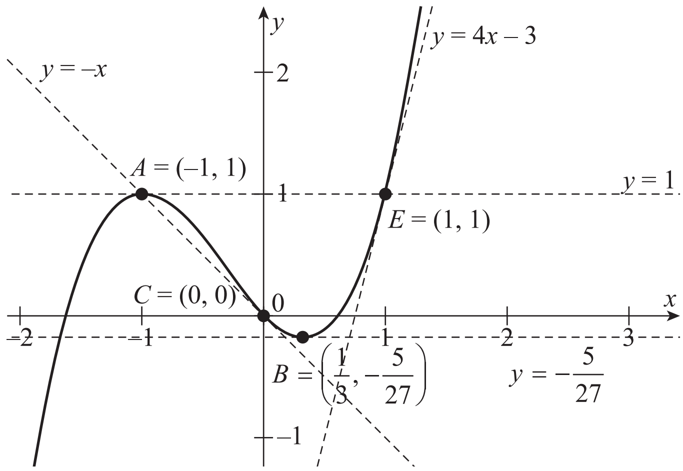
Ewentualne punkty styczności:

$f(1) = 1$, $f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{5}{3} = \frac{-125+75+45}{27} = -\frac{5}{27}$

$E = (1, 1)$, $F = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{27}\right)$.

Zatem prosta o równaniu $y = 4x - 3$ jest styczną w punkcie E.

Odp. D. (Ilustracja na rysunku poniżej)



ZADANIE OTWARTE z kodowaną odpowiedzią

Zadanie 5. (0-2)
Wyznacz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych, które dzielą się przez 6.
Zakoduj trzy cyfry sumy:

Cyfra		
tysięcy	setek	dziesiątek

Rozwiązanie.
Jest to suma wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy $r = 6$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 102, a ostatni 996.
Wyznaczymy ilość wyrazów tego ciągu: $996 = 102 + (n - 1)6$, $6n = 900$, $n = 150$.
Zatem $S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350$.
Odp. 235.

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 6 (0-3)
Uzasadnij, że $(x + y)(x + y + 2\cos\alpha) + 2 \geq 2\sin^2\alpha$ dla dowolnych $x, y, \alpha \in \boldsymbol{R}$.
Rozwiązanie.
Następujące nierówności są równoważne:
$(x + y)(x + y + 2\cos\alpha) + 2 \geq 2\sin^2\alpha$
$(x + y)^2 + (x + y)2\cos\alpha + 2 - 2\sin^2\alpha \geq 0$
$(x + y)^2 + (x + y)2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha \geq 0$
$(x + y)^2 + 2(x + y)\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \geq 0$
$(x + y + \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha \geq 0$.
Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

II sposób.
Potraktujmy nierówność jako nierówność o niewiadomej x i parametrach y, α.
Przekształcając nierówność do postaci standardowej otrzymujemy:
$x^2 + 2xy + y^2 + 2x\cos\alpha + 2y\cos\alpha + 2 - 2\sin^2\alpha \geq 0$
$x^2 + 2(y + \cos\alpha)x + y^2 + 2y\cos\alpha + 2\cos^2 \geq 0$.
Obliczamy wyróżnik
$\Delta = 4(y + \cos\alpha)^2 - 4(y^2 + 2y\cos\alpha + 2\cos^2\alpha) = -4\cos^2\alpha$.
Czyli $\Delta \leq 0$.
Zatem nierówność $(x + y)(x + y + 2\cos\alpha) + 2 \geq 2\sin^2\alpha$ jest prawdziwa dla $x, y, \alpha \in \boldsymbol{R}$.

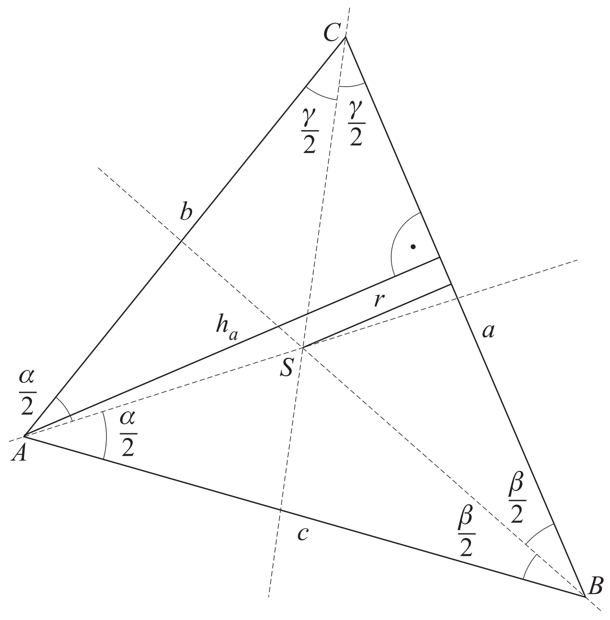
Punktacja.
Wykorzystanie wzoru na „jedynkę trygonometryczną (1p).
Dokończenie dowodu (2p).

Zadanie 7 (0-3)
Udowodnij, że w dowolnym trójkącie ABC

$$h_a = 2p \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Oznaczenia standardowe: α, β, γ miary kątów trójkąta w wierzchołkach odpowiednio A, B, C, $2p$ – obwód trójkąta, h_a – wysokość trójkąta opuszczona z wierzchołka A.

Rozwiązanie.



Niech punkt S będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Wykorzystując znane wzory na pole trójkąta otrzymujemy $\frac{1}{2}ah_a = pr$.
Wyznaczmy teraz a jako funkcję r, α, β, γ.

$$a = r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = r\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) = r\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = r\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$a = r\frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = r\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Zatem

$$h_a = \frac{2pr}{a} = \frac{2pr}{r\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}} = \frac{2p\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Punktacja.

Wyznaczenie $h_a = \frac{2pr}{a}$ (1p).

Dokończenie dowodu (2p).

Zadanie 8 (0-4)

Dwaj turyści jednocześnie zaczęli marsz ze stałą prędkością i tą samą trasą. Pierwszy z miejscowości A do miejscowości B, drugi z B do A. Po spotkaniu pierwszy turysta maszerował jeszcze 6 godzin nim dotarł do B. Drugi turysta po spotkaniu maszerował jeszcze 2 godziny i 40 minut nim dotarł do A. Po jakim czasie od rozpoczęcia marszu turyści się spotkali.

Rozwiązanie.

Niech t oznacza czas, po jakim turyści się spotkali, v_1 prędkość pierwszego turysty, v_2 prędkość drugiego turysty.

Z treści zadania mamy

$$\begin{cases} t \cdot v_2 = 6 \cdot v_1 \\ t \cdot v_1 = \frac{8}{3} \cdot v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 6 \cdot \frac{v_1}{v_2} \\ t = \frac{8}{3} \cdot \frac{v_2}{v_1} \end{cases}$$

Stąd

$$6 \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$$

$$t = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Odp. Turyści spotkali się po czterech godzinach.

Punktacja.
Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie układu równań (1p).
Wyznaczenie $\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$ (2p).
Dokończenie i odpowiedź (1p).

II sposób.
Oznaczenia tak jak w sposobie pierwszy.
Z treści zadania mamy

$$\begin{cases} t \cdot v_2 = 6 \cdot v_1 \\ t \cdot v_1 = \frac{8}{3} \cdot v_2 \end{cases}$$

Mnożąc równania stronami (v_1, v_2, $t > 0$) otrzymujemy:
$t^2 \cdot v_2 \cdot v_1 = 16 \cdot v_1 \cdot v_2$
$t^2 = 16$
$t = 4$

Zadanie 9 (0-4)

Wyznacz cztery liczby takie, że
1. Pierwsze trzy liczby tworzą ciąg geometryczny.
2. Ostatnie trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny.
3. Suma skrajnych liczb wynosi 21.
4. Suma liczb środkowych wynosi 18.

Rozwiązanie.
Niech a, b, c, d będą szukanymi liczbami.
Wtedy

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 2c = b + d \\ a + d = 21 \\ b + c = 18 \end{cases}$$

Dodając drugie i czwarte równanie otrzymujemy:
$3c + b = 18 + b + \mathrm{d}$, $\quad d = 3c - 18$.

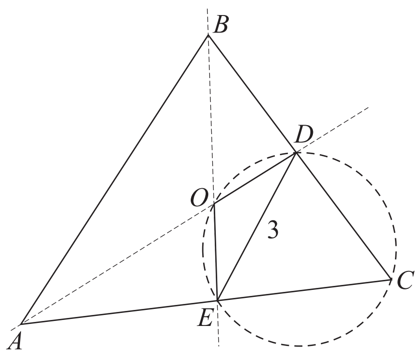
Podstawiając do trzeciego równania mamy:
$a + 3c - 18 = 21,\ a = -3c + 39.$
Z czwartego równania otrzymujemy:
$b = 18 - c.$
Wykorzystamy teraz pierwsze równanie:
$(18 - c)^2 = c(-3c + 39)$
$324 - 36c + c^2 = -3c^2 + 39c$
$4c^2 - 75c + 324 = 0$
$\Delta = 5625 - 5184 = 441 = 21^2$
$c_1 = \dfrac{75+21}{8} = 12,\ c_2 = \dfrac{75-21}{8} = \dfrac{27}{4}$

Odp. $(a, b, c, d) = (3, 6, 12, 18)$, $(a, b, c, d) = \left(\dfrac{75}{4}, \dfrac{45}{4}, \dfrac{27}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$.

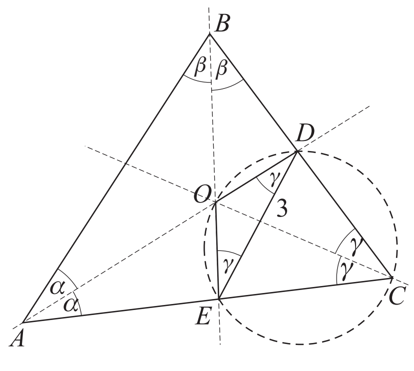
Punktacja.
Warunek na wyraz środkowy ciągu geometrycznego lub arytmetycznego (1p).
Układ czterech równań (1p).
Dokończenie (2p).

Zadanie 10 (0-4)

W trójkącie ABC dwusieczne AD i BE przecinają się w punkcie O (patrz rysunek). Na czworokącie $CDOE$ można opisać okrąg. Wiedząc, że $|DE| = 3$ wyznacz długości boków trójkąta DEO i kąty tego trójkąta.



Rozwiązanie.
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej
CO zawiera się w dwusiecznej kąta BCA, więc $|\sphericalangle DCO| = |\sphericalangle OCE| = \gamma$.
Kąty ODE i OCE oraz OED i DCO są oparte na tych samych łukach. Stąd $|\sphericalangle ODE| = |\sphericalangle OED| = \gamma$.
Zatem $|OD| = |OE|$.
Zauważmy, że $180° - (\alpha + \beta) = |\measuredangle AOB| = |\measuredangle EOD| = 180° - 2\gamma$.
Stąd $\alpha + \beta = 2\gamma$. Jednocześnie $\alpha + \beta = 90° - \gamma$. Zatem $3\gamma = 90°$, $\gamma = 30°$.
Czyli $|\measuredangle EOD| = 120°$.



Z twierdzenia sinusów $\dfrac{|OD|}{\sin 30°} = \dfrac{3}{\sin 120°}$, $|OD| = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$.

Uwaga. Można nie korzystać z twierdzenia sinusów.

$\dfrac{\frac{1}{2}|DE|}{|OD|} = \cos\gamma,\ |OD| = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}.$

Odp. Długości boków 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Kąty 120°, 30°, 30°.

Punktacja.
Wyznaczenie kątów (2p).
Wyznaczenie boków (2p).

Zadanie 11 (0-4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $x^2 - 20x + a = 0$ ma dwa pierwiastki takie, że jeden jest kwadratem drugiego.

Rozwiązanie.

Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami tego równania i $x_1{}^2 = x_2$.
Wtedy $x_1{}^2 + x_1 = x_2 + x_1 = 20$.
Zatem x_1 jest pierwiastkiem równania $x^2 + x - 20 = 0$.
$\Delta = 81$.
Wtedy rozwiązaniami tego równania są liczby:

$x_1 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$ lub $x_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$.

Stąd $x_2 = (-5)^2 = 25$ lub $x_2 = 4^2 = 16$.
Zatem $a = x_1 \cdot x_2 = -125$ lub $a = 64$.
Łatwo sprawdzić, że równanie $x^2 - 20x - 125 = 0$ ma dwa rozwiązania -5, 25 spełniające warunki zadania, analogicznie równanie $x^2 - 20x + 64 = 0$ ma rozwiązania 4, 16.
Odp. $a \in \{-125, 64\}$.

Punktacja.

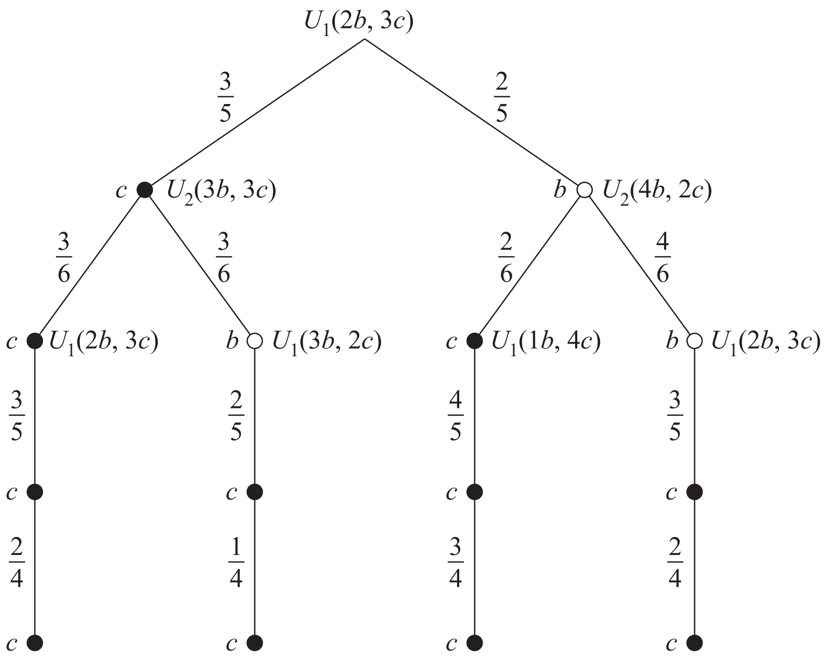
Sprowadzenie do równania $x^2 - x - 20 = 0$	(1p).
Rozwiązanie tego równania	(1p).
Wyznaczenie a	(1p).
Sprawdzenie	(1p).

Zadanie 12 (0-5)

Dane są dwie urny $\boldsymbol{U_1}$ i $\boldsymbol{U_2}$. W $\boldsymbol{U_1}$ są dwie kule białe i trzy czarne natomiast w $\boldsymbol{U_2}$ trzy białe i dwie czarne. Z $\boldsymbol{U_1}$ losujemy jedną kulę i wrzucamy do $\boldsymbol{U_2}$. Następnie z $\boldsymbol{U_2}$ losujemy też jedną kulę i wrzucamy do $\boldsymbol{U_1}$. Teraz losujemy dwie kule z $\boldsymbol{U_1}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą to kule czarne? Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie.

Narysujemy drzewo dla tego doświadczenia losowego



Niech A oznacza zdarzenie wylosowanie za drugim razem dwóch kul czarnych z $\boldsymbol{U_1}$.
Wtedy $A = \{cccc, cbcc, bccc, bbcc\}$.

Odp. $P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{54 + 18 + 48 + 48}{600} = \frac{168}{600} = \frac{7}{25}$.

Punktacja.

Narysowanie drzewa dla tego doświadczenia	(1p).
Obliczenie prawdopodobieństwa na pierwszym etapie (losowanie z $\boldsymbol{U_1}$)	(1p).
Obliczenie prawdopodobieństwa na drugim etapie (losowanie z $\boldsymbol{U_2}$)	(1p).
Obliczenie prawdopodobieństwa na III i IV etapie (losowanie z $\boldsymbol{U_1}$)	(1p).
Dokończenie	(1p).

II sposób.

A – wylosowanie za drugim razem dwóch kul czarnych z $\boldsymbol{U_1}$. D_2 – w $\boldsymbol{U_1}$ są dwie kule czarne po losowaniu $\boldsymbol{U_2}$. D_3 – w $\boldsymbol{U_1}$ są trzy kule czarne po losowaniu $\boldsymbol{U_2}$. D_4 – w $\boldsymbol{U_1}$ są cztery kule czarne po losowaniu $\boldsymbol{U_2}$. $P(A) = P(A \mid D_2) \cdot P(D_2) + P(A \mid D_3) \cdot P(D_3) + P(A \mid D_4) \cdot P(D_3)$	1 p
B_1 – wylosowanie kuli białej z $\boldsymbol{U_1}$ za pierwszym razem. C_1 – wylosowanie kuli czarnej z $\boldsymbol{U_1}$ za pierwszym razem. B_2 – wylosowanie kuli białej z $\boldsymbol{U_2}$. C_2 – wylosowanie kuli czarnej z $\boldsymbol{U_2}$. $D_2 = C_1 \cap B_2 \quad D_3 = B_1 \cap B_2 \cup C_1 \cap C_2 \quad D_4 = B_1 \cap C_2$	1 p
$P(B_1) = \frac{2}{5} \quad P(C_1) = \frac{3}{5}$ $P(B_2 \vert C_1) = \frac{3}{6} \quad P(B_2 \vert B_1) = \frac{4}{6} \quad P(C_2 \vert C_1) = \frac{3}{6} \quad P(C_2 \vert B_1) = \frac{2}{6}$	1 p
$P(D_2) = P(B_2 \vert C_1) \cdot P(C_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ $P(D_3) = P(B_2 \vert B_1) \cdot P(B_1) + P(C_2 \vert C_1) \cdot P(C_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{30}$ $P(D_4) = P(C_2 \vert B_1) \cdot P(B_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$	1 p
$P(A \vert D_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} \quad P(A \vert D_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} \quad P(A \vert D_4) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{17}{30} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{15} = \frac{7}{25}$	1p

Zadanie 13 (0-5)

Rozwiąż równanie $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie.

Następujące równania są równoważne:

$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

$\sin^2 2x = \sin^2 3x - \sin^2 x$

$\sin^2 2x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)$

$\sin^2 2x = 2\sin x \cdot \cos 2x \cdot 2\sin 2x \cdot \cos x$

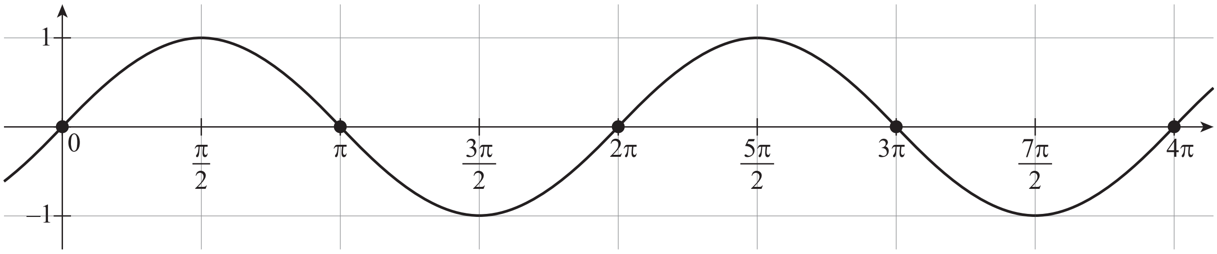
$\sin^2 2x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x$

$\sin^2 2x = 2\sin^2 2x \cdot \cos 2x$

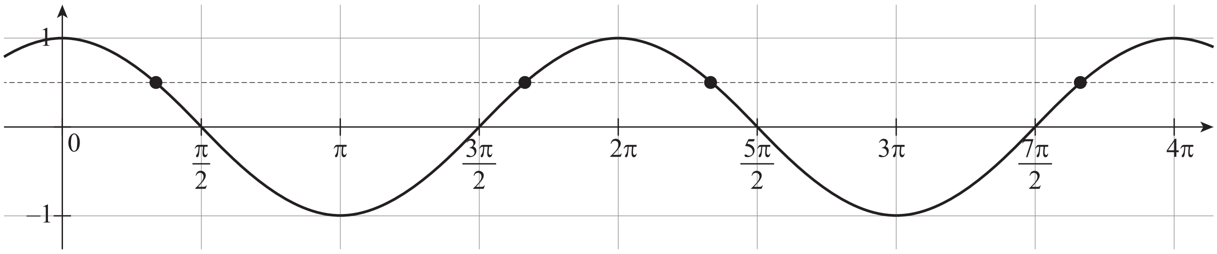
$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$

Niech $t = 2x$. Wtedy

$\sin t = 0$ lub $\cos t = \frac{1}{2}$ $t \in (0, 4\pi)$.



Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby: $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 2\pi$, $t_4 = 3\pi$, $t_5 = 4\pi$.



Rozwiązaniem drugiego równania są liczby:

$t_1 = \frac{1}{3}\pi$, $t_2 = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$, $t_3 = 2\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$, $t_4 = 2\pi + \frac{5}{3}\pi = \frac{11}{3}\pi$.

Odp. $x = \left\{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$.

Uwaga.
Można też równanie
$\sin^2 2x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x$
Przekształcić do postaci:
$\sin^2 2x = \sin 4x \cdot \sin 2x$
$\sin 2x(\sin 4x - \sin 2x) = 0$
$\sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \sin x = 0$.

II sposób.

Wykorzystując wzor $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ otrzymujemy:

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2}$

$1 - \cos 2x - \cos 4x = -\cos 6x$
$\cos 2x + \cos 4x = 1 + \cos 6x$
$2\cos 3x \cos x = 2\cos^2 3x$
$\cos 3x(\cos x - \cos 3x) = 0$
$\cos 3x \cdot \sin x \cdot \sin 2x = 0$

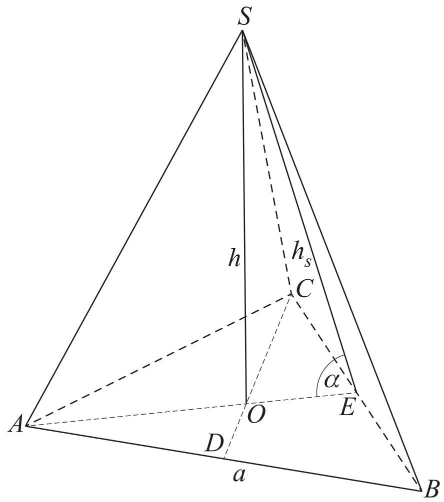
Punktacja.

Doprowadzenie do alternatywy równań	(2p).
Rozwiązanie równania $\sin 2x = 0$	(1p).
Rozwiązanie równania $\cos 2x = \frac{1}{2}$	(2p).

Zadanie 14 (0-5)

Wyznacz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, którego objętość wynosi V a ściana boczna nachylona jest do podstawy pod kątem α.

Rozwiązanie.



Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$h = |OE| \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{24}\operatorname{tg}\alpha$$

$$a = \sqrt[3]{24V\operatorname{ctg}\alpha} = 2\sqrt[3]{3V\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$h_s = \frac{|OE|}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\sqrt[3]{9V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

Odp. $P = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\sqrt[3]{9V^2\operatorname{ctg}^2\alpha} = \dfrac{2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{9V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

Punktacja.

Uzależnienie wysokości ostrosłupa od krawędzi podstawy	(1p).
Obliczenie krawędzi podstawy	(1p).
Obliczenie wysokości ściany bocznej	(1p).
Dokończenie i odpowiedź	(2p).

Zadanie 15 (0-7)

Na prostej o równaniu $y = x + 2$ wyznacz współrzędne punktów C i D takich, że stosunek $\frac{|AC|}{|BC|}$ osiąga wartość najmniejszą oraz stosunek $\frac{|AD|}{|BD|}$ osiąga wartość największą, gdzie $A = (0, -4)$, $B = (6, -2)$.

Rozwiązanie.

Niech punkt $E = (x, x + 2)$.

Wtedy

$|AE| = \sqrt{x^2 + (x+6)^2} = \sqrt{2x^2 + 12x + 36}$

$|BE| = \sqrt{(x-6)^2 + (x+4)^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 52}$

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \sqrt{\frac{2x^2 + 12x + 36}{2x^2 - 4x + 52}} = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 18}{x^2 - 2x + 26}}.$$

Niech $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 18}{x^2 - 2x + 26}, x \in \boldsymbol{R}$.

Wtedy

$$f'(x) = \frac{(2x+6)(x^2 - 2x + 26) - (x^2 + 6x + 18)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 26)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 4x^2 + 52x + 6x^2 - 12x + 156 - (2x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 12x + 36x - 36)}{(x^2 - 2x + 26)^2} =$$

$$= \frac{-8x^2 + 16x + 192}{(x^2 - 2x + 26)^2} = \frac{8(-x^2 + 2x + 24)}{(x^2 - 2x + 26)^2}$$

$\Delta = 4 + 4 \cdot 24 = 100$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-2 - 10}{-2} = 6,\ x_2 = \dfrac{-2 + 10}{-2} = -4$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 6)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (6, +\infty)$

Zatem funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -4)$ oraz rosnąca w $(-4, 6)$.

Stąd $f(-4) = \dfrac{16 - 24 + 18}{16 + 8 + 26} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$ jest wartością minimalną.

Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-4, 6)$ oraz malejąca w $(6, +\infty)$.

Zatem $f(6) = \dfrac{36 + 36 + 18}{36 - 12 + 26} = \dfrac{90}{50} = \dfrac{9}{5}$ jest wartością maksymalną.

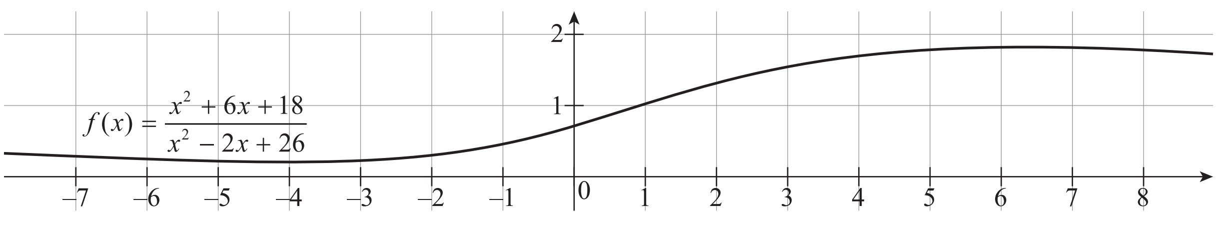
Udowodnimy jeszcze, że są to wartości odpowiednio najmniejsze i największe dla $x \in \boldsymbol{R}$.

Wynika to z

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 6x + 18}{x^2 - 2x + 26} = 1,\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 18}{x^2 - 2x + 26} = 1.$$

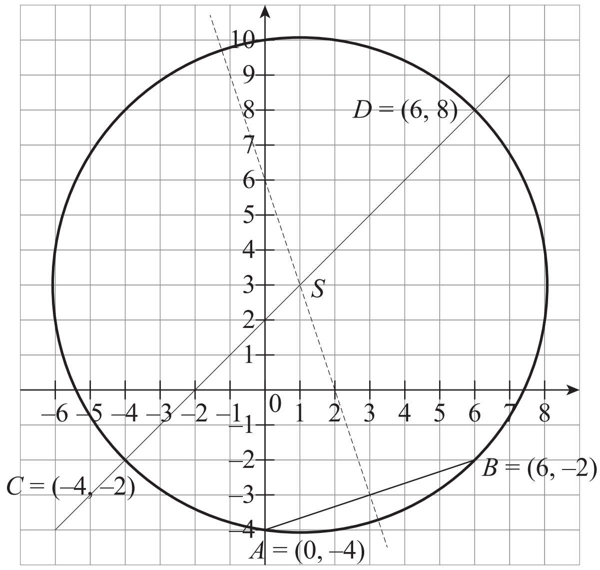
x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$1 \searrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{9}{5}$	$\searrow 1$

Tak wygląda wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 18}{x^2 - 2x + 26}$.



Odp. $C = (-4, -2)$, $D = (6, 8)$.

Uwaga.
Można uzasadnić, że punkty A, B, C, *D leżą na okręgu o środku należącym do danej prostej*.



<u>Punktacja</u>.

Wyprowadzenie wzoru na stosunek $\dfrac{|AE|}{|BE|}$ (2p).

Wyznaczenie punktów ekstremalnych odpowiedniej funkcji (3p).
Uzasadnienie, że są to wartości największe i najmniejsze (1p).
Wyznaczenie współrzędnych punktów (1p).