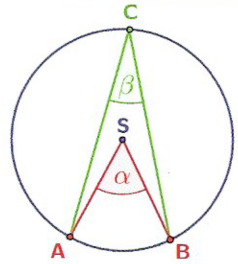
8 DOWODY GEOMETRYCZNE

TROCHĘ TEORII | TWIERDZENIA | PRZYKŁADY

Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.



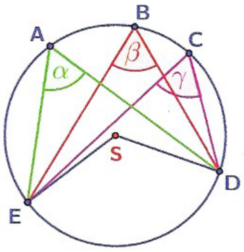
Kąt wpisany
$\beta = 27^\circ$

Kąt środkowy
$\alpha = 54^\circ$

czyli $\alpha = 2\beta$

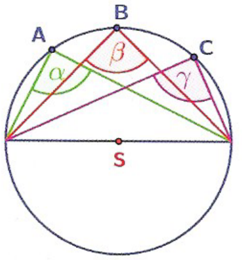
Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są równe.

Możemy również uogólnić, że kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości mają te same miary.



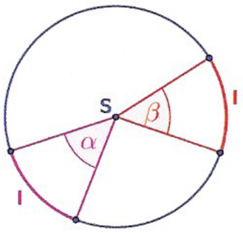
$\alpha = \beta = \gamma$

Kąt wpisany, oparty na półokręgu, jest kątem prostym.



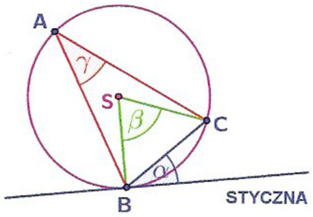
$\alpha = 90^\circ$
$\beta = 90^\circ$
$\gamma = 90^\circ$

Kąty środkowe oparte na łukach tej samej długości mają te same miary.



$\alpha = \beta$

Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności równy jest kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α i połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

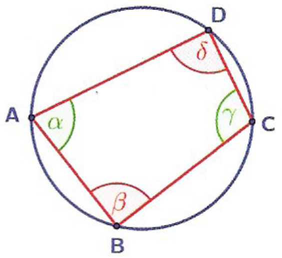


$\alpha = \gamma$
$\beta = 2\alpha$

OKRĄG OPISANY NA CZWOROKĄCIE

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

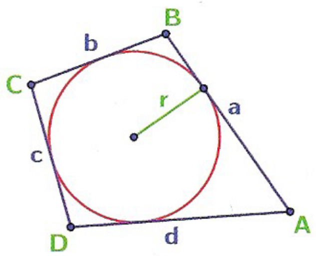
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$



OKRĄG WPISANY W CZWOROKĄT

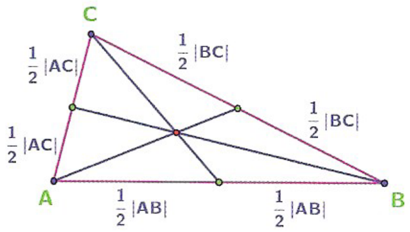
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$a + c = b + d$



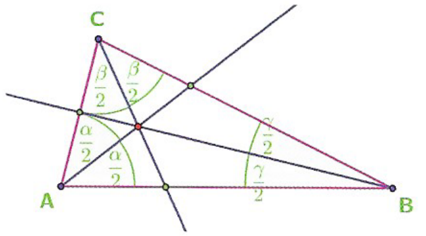
CHARAKTERYSTYCZNE ODCINKI I PUNKTY W TRÓJKĄCIE

ŚRODKOWA



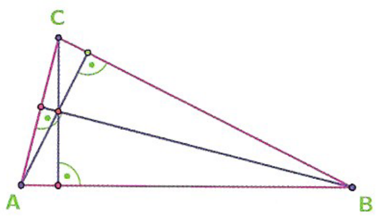
Przecięcie środkowych jest środkiem ciężkości trójkąta (barycentrum).

DWUSIECZNA



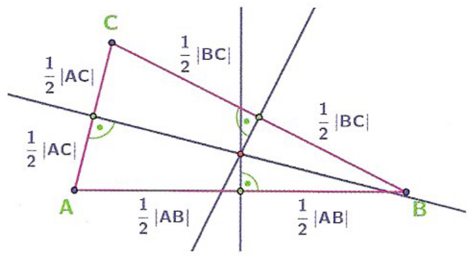
Przecięcie dwusiecznych jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

WYSOKOŚĆ



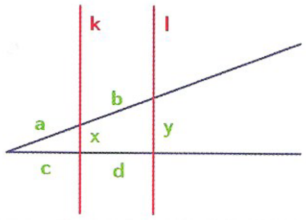
Proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy ortocentrum.

SYMETRALNA



Przecięcie symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

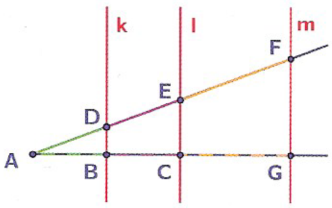
WŁASNOŚCI WYNIKAJĄCE Z TW. TALESA, GDZIE PROSTE $k \parallel l$



Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu.

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y} \text{ lub } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

TWIERDZENIE ODWROTNE DO TW. TALESA

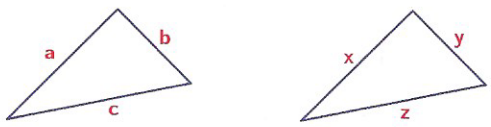


Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi oraz odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu, to te proste są równoległe.

Jeśli $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ $\left(\text{lub } \frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|CG|}, \text{ lub } \frac{|AE|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|CG|}\right)$, to proste k i l są równoległe (lub proste k, l i m są równoległe, lub proste l i m są równoległe).

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW — TWIERDZENIA

CECHA *bbb* — Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki są tej samej długości: $a = x$, $b = y$, $c = z$.



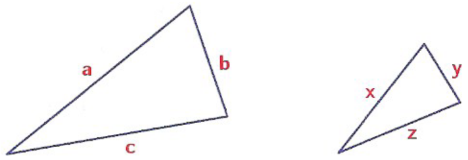
CECHA *bkb* — Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa boki są tej samej długości oraz kąt pomiędzy tymi bokami ma tę samą miarę: $a = x$, $b = y$, $\alpha = \beta$.

CECHA *kbk* Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa kąty są tej samej miary oraz bok przyległy do obu kątów jest tej samej długości: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $a = x$.

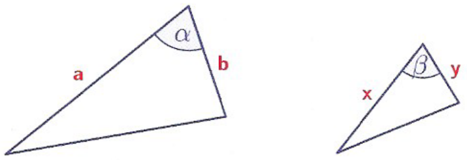
Informację o trójkątach przystających ABC i $A'B'C'$ zapisujemy następująco: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW — TWIERDZENIA

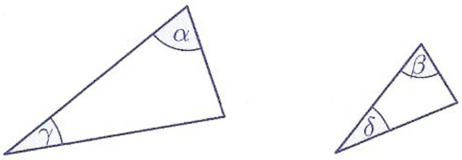
CECHA *bbb* Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki są proporcjonalne (lub stosunki odpowiednich boków są stałe): $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.



CECHA *bkb* Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa boki są proporcjonalne oraz kąt pomiędzy tymi bokami ma tę samą miarę: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ oraz $\alpha = \beta$.

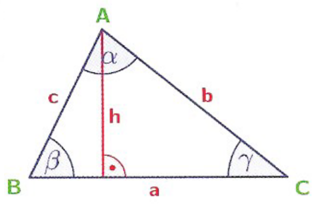


CECHA *kk* Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie kąty są tej samej miary: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$.



Informację o trójkątach podobnych ABC i $A'B'C'$ zapisujemy następująco: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

TRÓJKĄT RÓŻNOBOCZNY



WZÓR NA POLE POWIERZCHNI:

$P = \frac{1}{2} a \cdot h$

$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

$P = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$

$P = \frac{abc}{4R}$

$P = pr$

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
wzór Herona

WZÓR NA OBWÓD:

$O = a + b + c$

INNE WAŻNE INFORMACJE:

p — połowa obwodu
r — promień okręgu wpisanego w trójkąt
R — promień okręgu opisanego na trójkącie

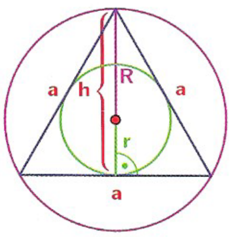
TWIERDZENIE SINUSÓW

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

TWIERDZENIE COSINUSÓW

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY



WZÓR NA POLE POWIERZCHNI:

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

WZÓR NA OBWÓD:

$O = 3a$

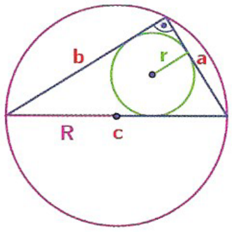
INNE WAŻNE INFORMACJE:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; h — wysokość trójkąta

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; r — promień okręgu wpisanego w trójkąt

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; R — promień okręgu opisanego na trójkącie

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY



WZÓR NA POLE POWIERZCHNI:

$P = \frac{1}{2} a \cdot b$

WZÓR NA OBWÓD:

$O = a + b + c$

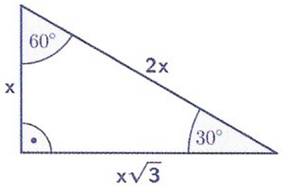
INNE WAŻNE INFORMACJE:

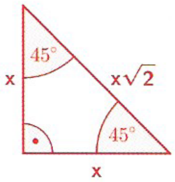
$a^2 + b^2 = c^2$ twierdzenie Pitagorasa

$r = \frac{a+b-c}{2}$; r — promień okręgu wpisanego w trójkąt

$R = \frac{c}{2}$; R — promień okręgu opisanego na trójkącie

DŁUGOŚCI BOKÓW W CHARAKTERYSTYCZNYCH TRÓJKĄTACH PROSTOKĄTNYCH

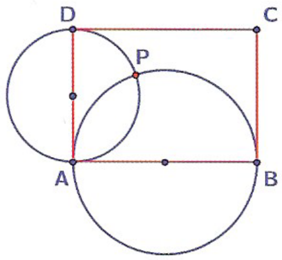




α	30°	60°	90°
boki	x	$x\sqrt{3}$	$2x$
α	45°	45°	90°
boki	x	x	$x\sqrt{2}$

DOWÓD 241 **P**

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B, P i D są współliniowe.



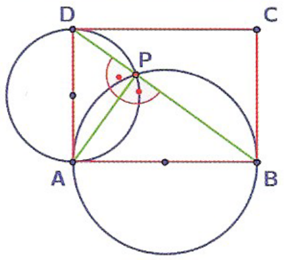
PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Rysujemy kąt DPA. Jest on oparty na średnicy AD okręgu, więc jest kątem prostym.

2° Rysujemy kąt BPA. Jest on oparty na średnicy AB okręgu, więc jest kątem prostym.

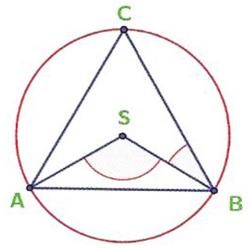
3° Dorysowane kąty proste są kątami przyległymi, więc tworzą w sumie kąt 180°.

4° Wynika z tego, że punkty B, P i D są współliniowe.



DOWÓD 242 **P**

W okrąg o środku S wpisano trójkąt równoramienny ABC, gdzie $|AC| = |BC|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ASB| = 4|\sphericalangle CBS|$.



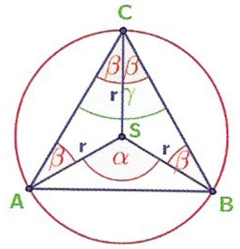
PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Niech: $|SA| = |SB| = |SC| = r$, α — kąt środkowy, γ — kąt wpisany.

2° Jeśli $|AC| = |BC|$ oraz $|AS| = |CS| = |BS| = r$, to $\triangle ASC$ i $\triangle BSC$ są przystające. Oba te trójkąty są równoramienne, więc ich kąty przy podstawach mają te same miary równe β.

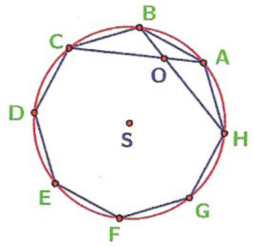
3° Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym:
$\alpha = 2\gamma \rightarrow \alpha = 2(\beta + \beta) \rightarrow \alpha = 2(2\beta) \rightarrow \alpha = 4\beta$

4° Otrzymaliśmy prawdziwą zależność $|\sphericalangle ASB| = 4|\sphericalangle CBS|$.



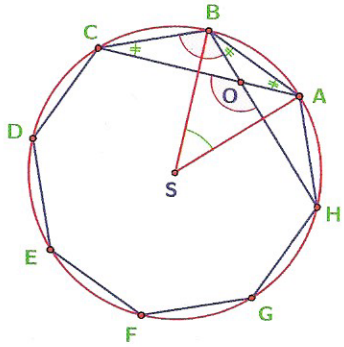
DOWÓD 243 **R**

Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$ wpisany w okrąg o środku S. W ośmiokącie poprowadzono przekątne AC i BH, które przecięły się w punkcie O (patrz rysunek). Wykaż, że $|\sphericalangle COH| = |\sphericalangle ABC|$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, zaznaczając poszczególne kąty.



2° Obliczamy sumę kątów wewnętrznych ośmiokąta foremnego ze wzoru: $(n-2) \cdot 180°$, gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta.

$S = (8-2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1080°$

3° Obliczamy miarę kąta ABC.

$|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{8} \cdot 1080° = 135°$

4° Kąt BCA jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy ASB.

$|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 360° = 22{,}5°$

$|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABH| = 22{,}5°$

5° Możemy więc obliczyć miarę kąta AOB z sumy kątów w trójkącie.

$|\sphericalangle AOB| = 180° - 2 \cdot 22{,}5° = 180° - 45° = 135°$

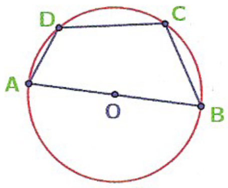
6° Kąt AOB oraz kąt COH są kątami wierzchołkowymi, więc mają równe miary.

$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COH| = 135°$

7° Kąty ABC i COH mają więc równe miary, czyli $|\sphericalangle COH| = |\sphericalangle ABC|$.

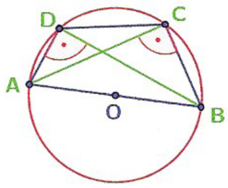
DOWÓD 244 **P**

Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg. Bok AB jest średnicą tego okręgu. Udowodnij, że $|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Skoro AB jest średnicą, to kąty ADB i ACB są proste, a trójkąty $\triangle ABD$ oraz $\triangle ABC$ są prostokątne.



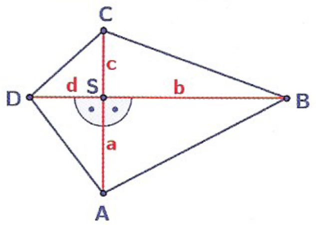
2° Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wynika, że: $|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$ i $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, więc $|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.

DOWÓD 245 **P**

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o różnych długościach boków. Wiedząc, że przekątne tego czworokąta są prostopadłe, udowodnij, że $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.
Niech: $|AS| = a$, $|BS| = b$, $|CS| = c$, $|DS| = d$.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle CDS$ i $\triangle ABS$.
$|AB|^2 = a^2 + b^2$ oraz $|CD|^2 = c^2 + d^2$

3° Otrzymane wartości podstawiamy do lewej strony równania.
$L = |AB|^2 + |CD|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$

4° Możemy zauważyć, że na mocy twierdzenia Pitagorasa $a^2 + d^2 = |AD|^2$ oraz $b^2 + c^2 = |BC|^2$.
$= \underbrace{a^2 + d^2}_{|AD|^2} + \underbrace{b^2 + c^2}_{|BC|^2} =$

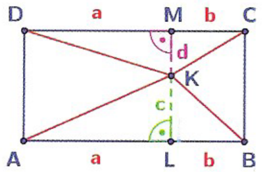
5° W ten sposób otrzymaliśmy prawą stronę równania.
$= |AD|^2 + |BC|^2 = P$

DOWÓD 246 **P**

Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt K położony we wnętrzu prostokąta. Wykaż, że $|AK|^2 + |CK|^2 = |BK|^2 + |DK|^2$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.
Niech: $|DM| = a = |AL|$, $|CM| = b = |BL|$, $|LK| = c$, $|KM| = d$.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle AKL$ i $\triangle CMK$.
$|AK|^2 = a^2 + c^2$ oraz $|CK|^2 = d^2 + b^2$

3° Otrzymane wartości podstawiamy do lewej strony równania.
$L = |AK|^2 + |CK|^2 = a^2 + c^2 + d^2 + b^2 =$

4° Możemy zauważyć, że na mocy twierdzenia Pitagorasa $a^2 + d^2 = |DK|^2$ oraz $b^2 + c^2 = |BK|^2$.
$= \underbrace{a^2 + d^2}_{|DK|^2} + \underbrace{b^2 + c^2}_{|BK|^2} =$

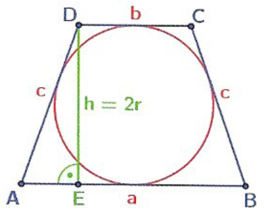
5° W ten sposób otrzymaliśmy prawą stronę równania.
$= |DK|^2 + |BK|^2 = P$

DOWÓD 247 **R**

Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wiedząc, że $|AB| = a$ i $|CD| = b$, wykaż, że $4r^2 = ab$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.
Niech: $|DE| = h = 2r$, $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = |BC| = c$.



2° Zauważmy ponadto, że $|AE| = \frac{a-b}{2}$.

3° Korzystamy z własności czworokąta opisanego na okręgu.

$$2c = a + b, \text{ czyli } |AD| = c = \frac{a+b}{2}$$

4° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle AED$.

$$|AD|^2 = |DE|^2 + |AE|^2$$

5° Podstawiamy odpowiednie wartości, wykonujemy działania i porządkujemy równanie, wyznaczając wartość $4r^2$.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = 4r^2 + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$$

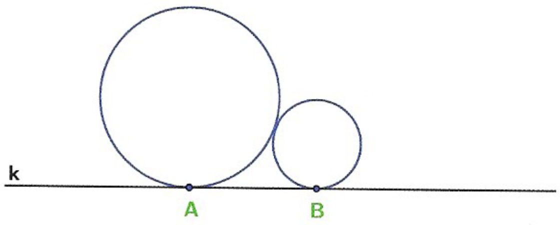
$$4r^2 = \frac{4ab}{4}$$

$$4r^2 = ab$$

DOWÓD 248 **R**

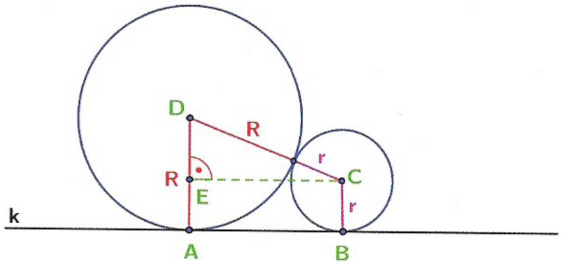
Dane są dwa styczne zewnętrznie okręgi o promieniach R i r, które jednocześnie są styczne do prostej k w punktach A i B (zobacz rysunek).

Wykaż, że $\sqrt{Rr} = \frac{|AB|}{2}$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle DEC$ i obliczamy długość odcinka EC, który jest równy odcinkowi AB.

$$(R-r)^2 + |AB|^2 = (R+r)^2$$

$$\cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} + |AB|^2 = \cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2}$$

$$|AB|^2 = 4Rr$$

3° Przekształcamy równanie, wyznaczając wartość $\sqrt{Rr}$.

$$|AB| = 2\sqrt{Rr}$$

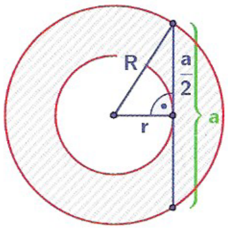
$$\sqrt{Rr} = \frac{|AB|}{2}$$

DOWÓD 249 **P**

Dane są dwa współśrodkowe okręgi o promieniach różnej długości. W większym okręgu poprowadzono cięciwę tak, że jest ona styczna zewnętrznie do mniejszego okręgu. Wykaż, że jeśli długość cięciwy wynosi a, to pole powierzchni pierścienia zawartego między tymi okręgami wynosi $\frac{a^2}{4}\pi$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Pole powierzchni pierścienia policzymy, odejmując od pola koła większego pole koła mniejszego.

$P_p = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczamy wartość $R^2 - r^2$.

$R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

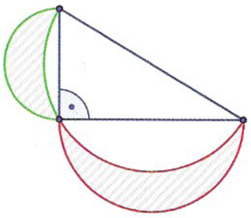
$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$

4° Podstawiamy wyznaczoną wartość i przekształcamy wyrażenie, aby otrzymać żądaną wartość.

$P_p = \pi(R^2 - r^2) = \pi\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\pi$

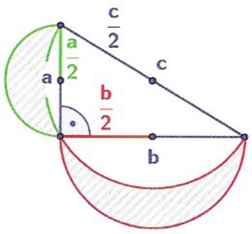
DOWÓD 250 **P**

Dany jest trójkąt prostokątny. Na każdym z boków narysowano półokręgi (zobacz rysunek). Wykaż, że pole zakreskowanych obszarów, zwanych księżycami Hipokratesa, równe jest polu trójkąta.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku pomocniczym oznaczamy boki trójkąta. Promienie półokręgów są połowami długości poszczególnych boków trójkąta.



2° Można zauważyć, że pole obu półksiężyców obliczymy, jeśli od sumy pól obu półkoli opartych na przyprostokątnych trójkąta i pola tego trójkąta odejmiemy pole półkola opartego na przeciwprostokątnej.

$P_K = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 =$

$= \frac{a^2}{8}\pi + \frac{b^2}{8}\pi + \frac{1}{2}ab - \frac{c^2}{8}\pi =$

3° Wyłączamy liczbę $\frac{\pi}{8}$ przed nawias.

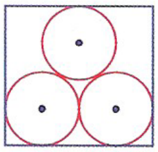
$= \frac{\pi}{8}(\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} - c^2) + \frac{1}{2}ab =$

4° Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że: $a^2 + b^2 = c^2$. Po podstawieniu za $c^2 = a^2 + b^2$ i redukcji otrzymujemy wartość pola trójkąta prostokątnego.

$= \frac{\pi}{8}(\underbrace{c^2 - c^2}_{0}) + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab = P_\triangle$

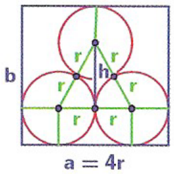
DOWÓD 251 **R**

W prostokąt wpisano trzy okręgi o promieniu r wzajemnie styczne. Każdy z okręgów jest styczny do jednego lub dwóch boków prostokąta (zobacz rysunek). Wykaż, że pole prostokąta wynosi $4(2+\sqrt{3})r^2$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia, łącząc środki okręgów. Odcinki te tworzą trójkąt równoboczny.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

2° Można zauważyć, że bok $a = 4r$, a bok $b = 2r + h$, gdzie h jest wysokością trójkąta równobocznego o boku $2r$.

3° Obliczamy wysokość h, a następnie długość boku b.

$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

$$b = 2r + r\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})r$$

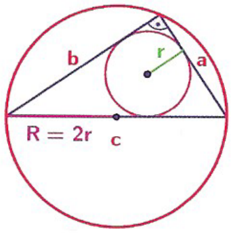
4° Obliczamy pole prostokąta, otrzymując żądaną wartość.

$$P_{\square} = a \cdot b = 4r \cdot (2 + \sqrt{3})r = 4(2 + \sqrt{3})r^2$$

DOWÓD 252 **R** W trójkąt prostokątny wpisano okrąg o promieniu r. Na tym samym trójkącie opisano okrąg o promieniu $2r$. Wykaż, że pole trójkąta wynosi $5r^2$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy. Jeżeli wiemy, że trójkąt jest prostokątny, to $c = 2R = 4r$.



2° Korzystamy ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny: $r = \frac{a+b-c}{2}$ i podstawiamy za $c = 4r$.

$$r = \frac{a+b-4r}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$2r = a + b - 4r$$

$$a + b = 6r$$

3° Obliczamy połowę obwodu, podstawiając wyznaczone wartości.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6r+4r}{2} = \frac{10r}{2} = 5r$$

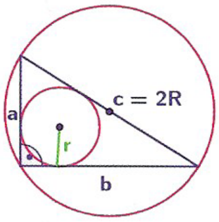
4° Obliczamy pole trójkąta ze wzoru: $P_{\triangle} = pr$, otrzymując żądaną wartość.

$$P_{\triangle} = 5r \cdot r = 5r^2$$

DOWÓD 253 **R** W trójkąt prostokątny wpisano okrąg o promieniu r. Na tym samym trójkącie opisano okrąg o promieniu R. Udowodnij, że pole trójkąta wynosi $(2R + r)r$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.
Niech: a i b — przyprostokątne, c — przeciwprostokątna.



2° Korzystamy ze wzoru: $P_{\triangle} = pr$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

$$P_{\triangle} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

3° Korzystamy ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny: $r = \frac{a+b-c}{2}$, gdzie $c = 2R$ i wyznaczamy sumę $a + b$.

$$r = \frac{a+b-2R}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$2r = a + b - 2R$$

$$a + b = 2r + 2R$$

4° Powracamy do wzoru na pole trójkąta i podstawiamy wyznaczone wartości.

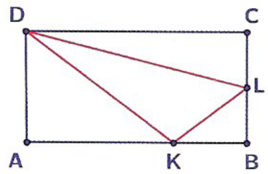
$$P_{\triangle} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{2r+2R+2R}{2} \cdot r =$$

5° Porządkujemy wyrażenie, otrzymując żądaną wartość.

$$= \frac{2r+4R}{2} \cdot r = (2R + r) \cdot r$$

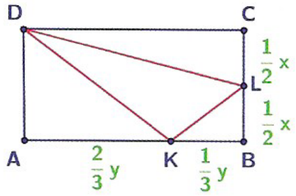
DOWÓD 254 P

W prostokącie $ABCD$ punkt K leży na boku AB w taki sposób, że $|AK| = 2|KB|$, a punkt L jest środkiem boku BC (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = x$ i $|CD| = y$, wykaż, że $P_{\triangle DKL} = \frac{1}{3} P_{\square ABCD}$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Niech: $|AD| = |BC| = x$ i $|AB| = |CD| = y$



2° Aby obliczyć pole $\triangle DKL$, należy od pola prostokąta odjąć pola trzech trójkątów: $\triangle ADK$, $\triangle BKL$ i $\triangle CDL$. Zauważmy, że: $|AK| = \frac{2}{3}y$, $|KB| = \frac{1}{3}y$, $|LB| = \frac{1}{2}x$, $|LC| = \frac{1}{2}x$.

$$P_{\triangle DKL} = P_{\square ABCD} - (P_{\triangle ADK} + P_{\triangle BKL} + P_{\triangle CDL}) =$$
$$= xy - \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{3}y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot y\right) =$$

3° Porządkujemy wyrażenie.

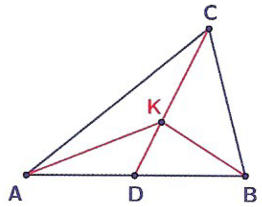
$$= xy - \left(\frac{2}{6}xy + \frac{1}{12}xy + \frac{1}{4}xy\right) = xy - \frac{8}{12}xy = \frac{4}{12}xy = \frac{1}{3}xy =$$

4° Zauważmy, że $P_{\square ABCD} = xy$, więc $P_{\triangle DKL} = \frac{1}{3} P_{\square ABCD}$.

$$= \frac{1}{3} P_{\square ABCD}$$

DOWÓD 255 R

W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD, na której zaznaczono punkt K (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{\triangle AKC} = P_{\triangle KBC}$.



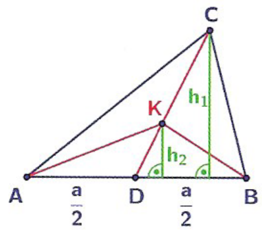
PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku wprowadzamy oznaczenia.

Niech: $|AB| = a$,

h_1 — wysokość trójkąta ABC opadająca na podstawę AB,

h_2 — wysokość trójkąta ABK opadająca na podstawę AB.



2° Zauważmy, że pole $\triangle AKC$ obliczamy, odejmując od pola $\triangle ADC$ pole $\triangle ADK$.

$$P_{\triangle AKC} = P_{\triangle ADC} - P_{\triangle ADK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_2 = \frac{a}{4}(h_1 - h_2)$$

3° Analogicznie obliczamy pole $\triangle KBC$.

$$P_{\triangle KBC} = P_{\triangle DBC} - P_{\triangle DBK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_2 = \frac{a}{4}(h_1 - h_2)$$

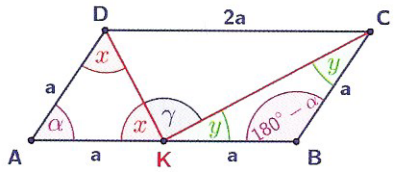
4° Wykazaliśmy więc, że $P_{\triangle AKC} = P_{\triangle KBC}$.

DOWÓD 256 P

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC. W połowie odcinka AB zaznaczono punkt K. Wykaż, że kąt DKC jest kątem prostym.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

2° Korzystając z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie oraz z twierdzenia, że suma kątów w równoległoboku przy jednym ramieniu wynosi 180°, obliczamy miary kątów x i y.

$$x=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$$

$$y=\frac{180^\circ-(180^\circ-\alpha)}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

3° Kąty γ, x, y tworzą łącznie kąt półpełny, więc ich suma wynosi 180°. Wyznaczamy miarę kąta γ.

$$\gamma=180^\circ-x-y=180^\circ-\frac{180^\circ-\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{360^\circ-180^\circ+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$

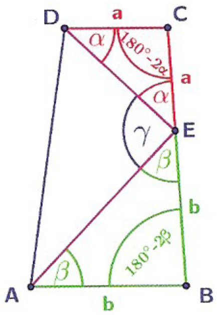
4° Wynika z tego, że kąt DKC jest kątem prostym.

DOWÓD 257 **P**

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC|=|CD|$ i $|EB|=|AB|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Rysujemy trapez oraz oznaczamy równe długości a i b oraz kąt γ.



2° Trójkąt DEC jest równoramienny, czyli kąty przy podstawie są równe, więc oznaczamy $|\sphericalangle CDE|=|\sphericalangle DEC|=\alpha$. Określamy miarę $\sphericalangle DCE$.

$$|\sphericalangle DCE|=180^\circ-2\alpha$$

3° Analogicznie trójkąt ABE jest równoramienny, więc $|\sphericalangle BAE|=|\sphericalangle AEB|=\beta$. Określamy miarę $\sphericalangle ABE$.

$$|\sphericalangle ABE|=180^\circ-2\beta$$

4° Korzystamy z twierdzenia o sumie kątów przy jednym ramieniu w trapezie.

$$180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=180^\circ$$
$$-2\alpha-2\beta=-180^\circ$$
$$\alpha+\beta=90^\circ$$

5° Kąty α, β, γ tworzą łącznie kąt półpełny, więc ich suma wynosi 180°. Wyznaczamy z równania kąt γ.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$
$$90^\circ+\gamma=180^\circ$$
$$\gamma=90^\circ$$

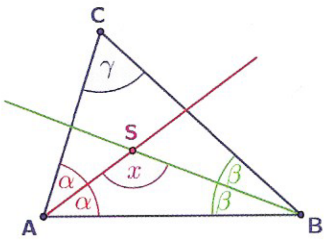
6° Wynika z tego, że kąt AED jest prosty.

DOWÓD 258 **P**

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B, które przecinają się w punkcie S. Uzasadnij, że kąt ASB jest rozwarty.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.
Niech: $\sphericalangle ASB=x$.



2° Układamy równanie, korzystając z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych w $\triangle ASB$. Następnie wyznaczamy kąt x.

$$\alpha+\beta+x=180^\circ$$
$$x=180^\circ-(\alpha+\beta)$$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

3° Układamy równanie, korzystając z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych w $\triangle ABC$. Następnie wyznaczamy sumę kątów $\alpha+\beta$.

$$2\alpha+2\beta+\gamma=180^\circ \quad |:2$$
$$\alpha+\beta+\frac{\gamma}{2}=90^\circ$$
$$\alpha+\beta=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$$

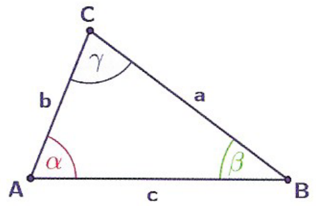
4° Wyznaczoną wartość podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy kąt x.

$$x=180^\circ-(\alpha+\beta)$$
$$x=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$x=90^\circ+\frac{\gamma}{2}>90^\circ$$

5° Wynika z tego, że kąt ASB jest rozwarty.

DOWÓD 259 **R**

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC o bokach długości a, b, c i kątach α, β, γ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}=\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\gamma$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy dwukrotnie z twierdzenia cosinusów, przekształcając równania tak, aby otrzymać wyrażenia znajdujące się w liczniku i mianowniku lewej strony tezy.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \;\rightarrow\; 2ab\cos\gamma=a^2+b^2-c^2$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \;\rightarrow\; 2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$$

2° Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma},\ \text{czyli}\ \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

3° Podstawiamy wyznaczone wartości do lewej strony równania i wykonujemy działania, korzystając dodatkowo ze związku wyznaczonego w punkcie 2°. Po przekształceniu wyrażenia otrzymujemy postać z prawej strony równania.

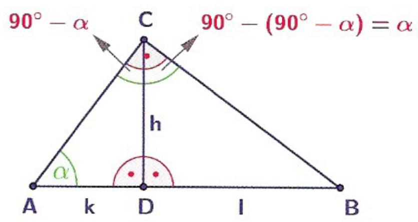
$$L=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{\cancel{2}a\cancel{b}\cos\gamma}{\cancel{2}\cancel{b}c\cos\alpha}=\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}=$$
$$=\frac{a}{c}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\gamma=P$$

DOWÓD 260 **P**

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, gdzie wysokość $|CD|=h$. Wysokość CD podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach k i l. Wykaż, że $h=\sqrt{kl}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy. Kąty $\sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle CDB$ mają miarę 90°.



2° Zauważmy, że kąty $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle BCD$ mają tę samą miarę równą α.

3° Na mocy cechy kąt-kąt $\triangle ACD$ jest podobny do $\triangle BCD$. Zatem możemy zapisać proporcję.

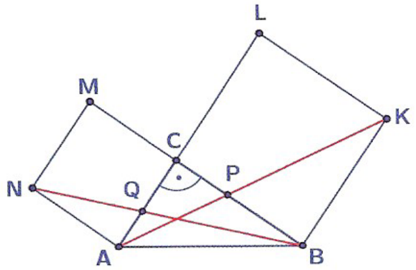
$$\frac{l}{h}=\frac{h}{k}$$

4° Korzystamy z własności proporcji i wyznaczamy wartość h.

$$h^2=kl$$
$$h=\sqrt{kl}$$

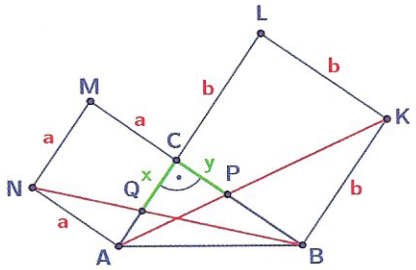
DOWÓD 261 **R**

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na bokach BC i AC dorysowano kwadraty odpowiednio $BKLC$ oraz $ACMN$. Poprowadzono odcinki AK oraz BN, które przecięły boki trójkąta ABC w punktach P i Q (zobacz rysunek). Wykaż, że $|PC| = |QC|$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku wprowadzamy oznaczenia.
Niech: $|PC| = y$, $|QC| = x$.



2° Z podobieństwa trójkątów QBC i NBM (na mocy cechy kąt-kąt) zapisujemy proporcję. $\frac{x}{b} = \frac{a}{a+b} \quad \Big| \cdot b$

3° Wyznaczamy długość x. $x = \frac{ab}{a+b}$

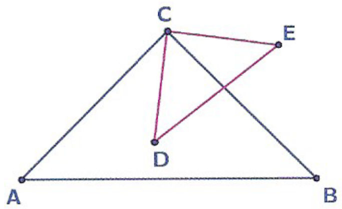
4° Z podobieństwa trójkątów APC i AKL (na mocy cechy kąt-kąt) zapisujemy kolejną proporcję. $\frac{y}{a} = \frac{b}{a+b} \quad \Big| \cdot a$

5° Wyznaczamy długość y. $y = \frac{ab}{a+b}$

6° Wykazaliśmy więc, że $x = y$, czyli $|PC| = |QC|$.

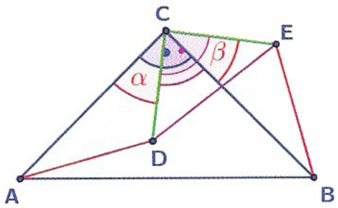
DOWÓD 262 **P**

Dane są trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AD| = |BE|$, jeśli wiadomo, że $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = 90^\circ$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku oznaczamy kąty proste oraz rysujemy odcinki AD, BE.



2° Sprawdźmy, czy trójkąty ADC i BEC są przystające.

3° Długości boków $|AC| = |CB|$ są równe.

4° Długości boków $|CD| = |CE|$ są równe.

5° Oznaczamy kąty: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle BCE = \beta$.

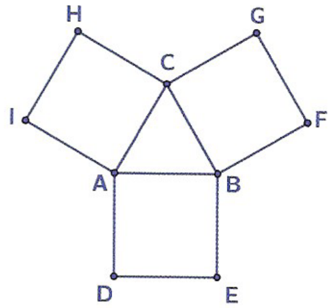
6° Jeśli udowodnimy, że $\alpha = \beta$, to $\triangle ADC$ będzie przystający do $\triangle BEC$.

7° Zauważmy, że $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \alpha$ oraz $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \beta$, więc $90^\circ - \alpha = 90^\circ - \beta \rightarrow \alpha = \beta$

8° Na podstawie cechy bok-kąt-bok (bkb) trójkąty ADC i BEC są przystające ($\triangle ADC \equiv \triangle BEC$), więc $|AD| = |BE|$.

DOWÓD 263 **P**

Na bokach trójkąta równobocznego ABC zbudowano kwadraty $ABED$, $CBFG$ i $ACHI$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt HDF jest równoboczny.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Rysujemy trójkąt HDF i odcinki HA, DB, FC — przekątne kwadratów.

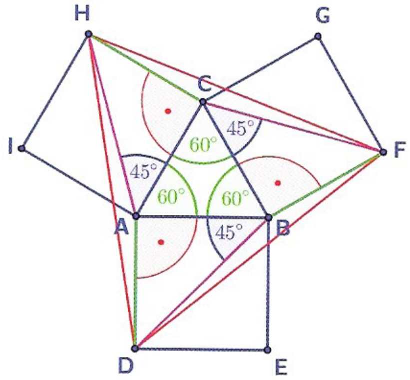
2° Powstały trzy trójkąty HDA, DFB, FHC. W każdym z nich odpowiednie dwa boki są równej długości. Gdyby więc kąt pomiędzy rozważanymi bokami był taki sam we wszystkich trójkątach, to trójkąty te byłyby podobne na mocy cechy bok-kąt-bok (*bkb*).

3° Zaznaczamy kąty, które potrafimy określić z własności kwadratu i trójkąta równobocznego $(90°, 45°, 60°)$.

4° Zauważmy, że przy każdym wierzchołku trójkąta ABC znajdują się trzy takie same kąty $90°$, $45°$, $60°$. Oznacza to, że zachodzi równość: $|\sphericalangle HAD| = |\sphericalangle DBF| = |\sphericalangle FCH|$.

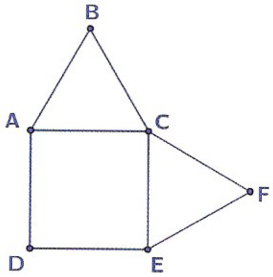
5° Można więc stwierdzić, że trójkąty są przystające (*bkb*): $\triangle HDA \equiv \triangle DFB \equiv \triangle FHC$.

6° Jeśli trójkąty są przystające, to odcinki HD, DF, FH są równe, więc trójkąt HDF jest równoboczny.



DOWÓD 264 **P**

Na boku trójkąta równobocznego ABC zbudowano kwadrat, a na boku kwadratu zbudowano kolejny trójkąt równoboczny (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt BDF jest równoboczny.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

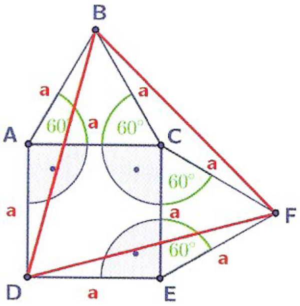
1° Na rysunku zaznaczamy poszczególne odcinki i kąty.

2° Obliczamy miarę kąta BAD: $|\sphericalangle BAD| = 60° + 90° = 150°$.

3° Obliczamy miarę kąta DEF: $|\sphericalangle DEF| = 60° + 90° = 150°$.

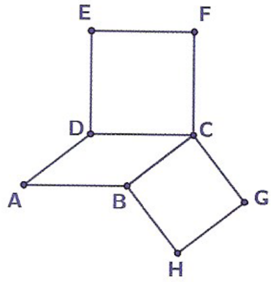
4° Obliczamy miarę kąta BCF: $|\sphericalangle BCF| = 360° - (90° + 2 \cdot 60°) = 150°$.

5° Trójkąty BAD, DEF i BCF są trójkątami równoramiennymi, a kąt między ramionami w tych trójkątach wynosi $150°$. Są to więc trójkąty przystające, stąd $|DB| = |DF| = |BF|$, a więc trójkąt BDF jest równoboczny.



DOWÓD 265 **P**

Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach BC i CD zbudowano kwadraty $BHGC$ i $DCFE$. Wykaż, że $|AC| = |FG|$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku zaznaczamy odcinki AC i FG.

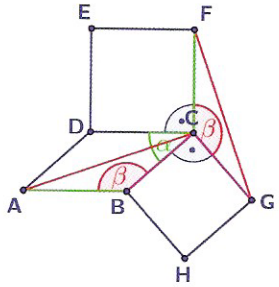
2° Wskazujemy równe długości: $|AB| = |FC|$ i $|BC| = |CG|$.

3° Trójkąty ABC i FCG mają po dwa odpowiednio równe boki i mogą być przystające, jeśli znajdziemy równy kąt między odpowiednimi dwoma bokami.

4° Zaznaczamy wszystkie kąty przy wierzchołku C i układamy równanie:
$\alpha + \beta + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$

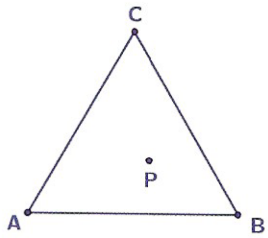
5° Suma kątów przy ramieniu równoległoboku wynosi 180°, więc kąt przy wierzchołku B musi mieć wartość β.

6° Wynika z tego, że $\triangle ABC \equiv \triangle FCG$, więc $|AC| = |FG|$.



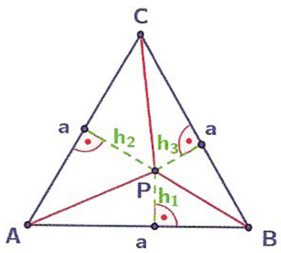
DOWÓD 266 **P**

We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku długości a umieszczono punkt P (zobacz rysunek). Wykaż, że suma wszystkich odległości tego punktu od poszczególnych boków wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Dzielimy trójkąt równoboczny na trzy trójkąty — każdy z nich składa się z jednego boku trójkąta równobocznego, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt P. Wówczas h_1, h_2, h_3 są wysokościami, jak również odległościami punktu P od poszczególnych boków.



2° Pole trójkąta równobocznego równe jest sumie pól tych trójkątów. Układamy więc równanie i wyznaczamy sumę wysokości.

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_{\triangle R}$$

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Big| : \frac{1}{2}a$$

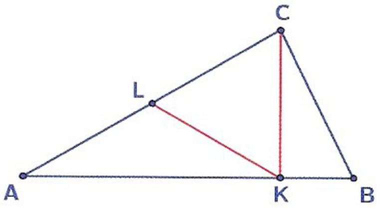
$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{a^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{a}}$$

3° Otrzymaliśmy żądaną wartość.

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

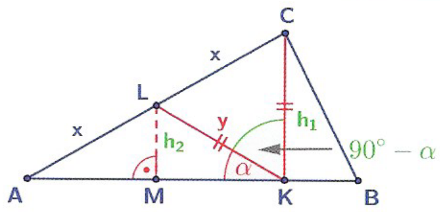
DOWÓD 267 P

Dany jest trójkąt ABC, w którym poprowadzono wysokość CK i odcinek KL, gdzie L jest środkiem boku AC oraz $|CK| = |KL|$. Wykaż, że trójkąt KCL jest trójkątem równobocznym.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku wprowadzamy oznaczenia.



2° Z podobieństwa trójkątów AML i AKC (cecha kąt-kąt) zapisujemy proporcję.

$$\frac{h_1}{2x} = \frac{h_2}{x}$$

$$2xh_2 = h_1x \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{1}{2}h_1$$

3° Jeżeli $h_1 = y$, to $h_2 = \frac{1}{2}y$.

4° Obliczamy miarę kąta α w $\triangle MKL$.

$$\sin\alpha = \frac{h_2}{y} = \frac{\frac{1}{2}y}{y} = \frac{1}{2}\text{, więc } \alpha = 30°$$

5° Kąt α i $\sphericalangle LKC$ tworzą kąt prosty, więc możemy obliczyć miarę $\sphericalangle LKC$.

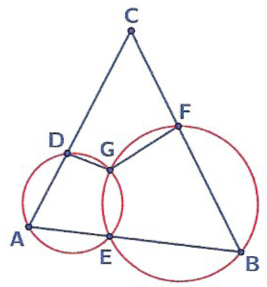
$$|\sphericalangle LKC| = 90° - 30° = 60°$$

6° $\triangle KCL$ jest równoramienny i kąt przy wierzchołku ma miarę $60°$, zatem kąty przy podstawie również mają po $60°$.

7° $\triangle KCL$ jest więc równoboczny.

DOWÓD 268 R

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB znajduje się punkt E. Dorysowano dwa okręgi. Pierwszy okrąg przechodzi przez punkty A i E, a drugi przez punkty B i E. Okręgi przecięły się również w punkcie G. Pierwszy okrąg przeciął bok AC w punkcie D, a drugi okrąg — bok BC w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że na czworokącie $CDGF$ można opisać okrąg.



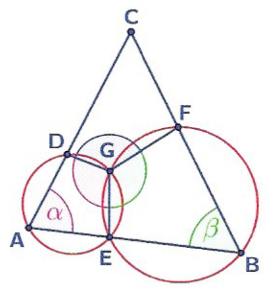
PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Na rysunku pomocniczym zaznaczamy odcinek GE oraz oznaczamy kąty trójkąta przy wierzchołkach A i B odpowiednio jako α i β.

2° Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie: $|\sphericalangle DCF| = 180° - \alpha - \beta$.

3° Na czworokącie $AEGD$ opisany jest okrąg, więc $|\sphericalangle DGE| = 180° - \alpha$.

4° Na czworokącie $EBFG$ opisany jest okrąg, więc $|\sphericalangle EGF| = 180° - \beta$.



5° Obliczamy miarę kąta DGF.

$$|\sphericalangle DGF| = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) =$$
$$= 360° - 180° + \alpha - 180° + \beta = \alpha + \beta$$

6° Na czworokącie $DGFC$ będzie można opisać okrąg, jeśli $|\sphericalangle DCF| + |\sphericalangle DGF| = 180°$. Sprawdzamy, czy suma tych kątów spełnia ten warunek.

$$|\sphericalangle DCF| + |\sphericalangle DGF| = 180° - \alpha - \beta + \alpha + \beta =$$
$$= 180°$$

7° Na czworokącie $DGFC$ można więc opisać okrąg.