# 8 ZADANIA DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

zobacz dowód 241

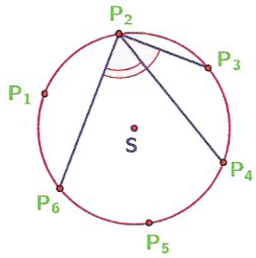
**DOWÓD 269** | **P**

Dane są dwa niewspółśrodkowe okręgi, które przecinają się w punktach $K$ i $L$. Odcinek $AK$ jest średnicą pierwszego okręgu, a odcinek $BK$ jest średnicą drugiego okręgu. Wykaż, że punkty $A$, $L$, $B$ są współliniowe.

zobacz dowód 242

**DOWÓD 270** | **P**

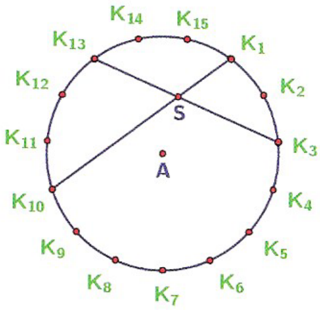
Okrąg o środku $S$ podzielono punktami $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ na sześć równych łuków. Uzasadnij, że $|\sphericalangle P_6P_2P_4| = 2|\sphericalangle P_4P_2P_3|$.




zobacz dowód 243

**DOWÓD 271** | **R**

Punkty $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_{14}, K_{15}$ dzielą okrąg o środku w punkcie $A$ na 15 równych łuków (zobacz rysunek). Punkt $S$ jest punktem przecięcia odcinków $K_1K_{10}$ oraz $K_3K_{13}$. Wykaż, że $|\sphericalangle K_3SK_{10}| = 120°$.




zobacz dowód 244

**DOWÓD 272** | **P**

W okrąg o promieniu $r$ wpisano kwadrat $ABCD$. Punkt $K$ leży na okręgu, ale nie jest wierzchołkiem kwadratu $ABCD$. Wykaż, że $|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2 = 8r^2$.

zobacz dowód 245

**DOWÓD 273** | **P**

Dany jest trapez prostokątny o podstawach $AB$ i $CD$. Wykaż, że różnica kwadratów podstaw jest równa różnicy kwadratów przekątnych tego trapezu.

zobacz dowód 246

**DOWÓD 274** | **P**

Dany jest prostokąt $ABCD$, gdzie $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Wykaż, że odległość punktu $A$ od przekątnej $BD$ jest równa $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

zobacz dowód 247

**DOWÓD 275** | **R**

W trapezie równoramiennym podstawy mają długości $a$ i $b$. Uzasadnij, że pole koła wpisanego w ten trapez ma wartość $\frac{ab}{4}\pi$.

zobacz dowód 248

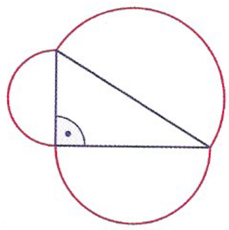
**DOWÓD 276** | **R**

Dane są trzy okręgi o środkach $S_1$, $S_2$ i $S_3$, których stosunek długości promieni wynosi $1 : 2 : 3$. Każdy okrąg jest styczny zewnętrznie z pozostałymi dwoma okręgami. Wykaż, że trójkąt $S_1S_2S_3$ jest prostokątny.

zobacz dowód 249

**DOWÓD 277** | **P**

Dany jest trójkąt prostokątny. Na każdym boku trójkąta zbudowano półkole (zobacz rysunek). Wykaż, że suma powierzchni obu półkoli zbudowanych na przyprostokątnych jest równa powierzchni półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej.



zobacz dowód 250

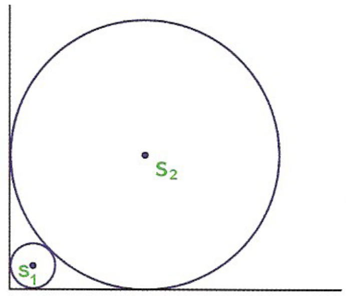
**DOWÓD 278** | **P**

Wykaż, że suma pól księżyców Hipokratesa zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego jest większa od pola tego trójkąta.

zobacz dowód 251

**DOWÓD 279** R

Dwa okręgi o środkach $S_1$ i $S_2$ są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego. Udowodnij, że stosunek promienia mniejszego z tych okręgów do promienia większego jest równy $3-2\sqrt{2}$.




zobacz dowód 252

**DOWÓD 280** R

W okrąg o promieniu $R$ wpisano trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a$ i $b$ oraz przeciwprostokątnej $c$. W trójkąt ten wpisano okrąg o promieniu $\frac{R}{2}$. Wykaż, że $R=\frac{a+b}{3}$.

zobacz dowód 253

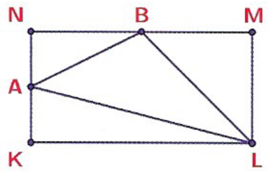
**DOWÓD 281** R

Na trójkącie prostokątnym opisano okrąg o promieniu $R$ i w ten sam trójkąt wpisano okrąg o promieniu $r$. Wykaż, że wysokość trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\frac{2Rr+r^2}{R}$.

zobacz dowód 254

**DOWÓD 282** P

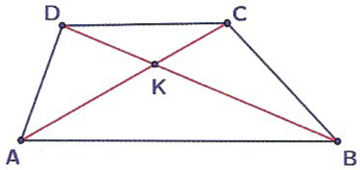
W prostokącie $KLMN$ punkt $A$ jest środkiem boku $KN$, a punkt $B$ środkiem boku $NM$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{\triangle ABL}=P_{\triangle ABN}+P_{\triangle BLM}$.




zobacz dowód 255

**DOWÓD 283** R

Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$. W trapezie poprowadzono przekątne przecinające się w punkcie $K$. Wiedząc, że $|AB|=12$, $|CD|=8$ oraz pole trójkąta $CDK$ równe jest 16, wykaż, że trójkąty $AKD$ i $BKC$ mają równe pola o wartości 24.




zobacz dowód 256

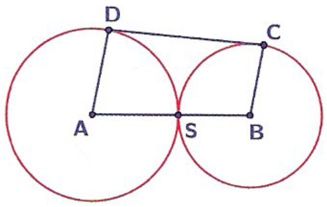
**DOWÓD 284** P

Z dwóch sąsiednich wierzchołków równoległoboku poprowadzono dwusieczne kątów. Wykaż, że dwusieczne te są prostopadłe.

zobacz dowód 257

**DOWÓD 285** P

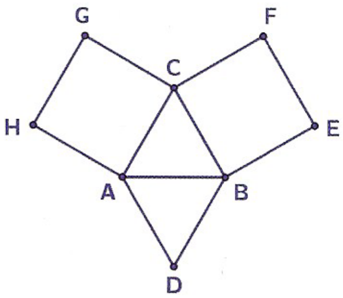
Dane są dwa okręgi o środkach w punktach $A$ i $B$ styczne w punkcie $S$ oraz trapez $ABCD$, w którym $AD \parallel BC$ (zobacz rysunek). Wykaż, że kąt $DSC$ jest kątem prostym.




zobacz dowód 258

**DOWÓD 286** P

Na kolejnych bokach trójkąta równobocznego $ABC$ zbudowono trójkąt równoboczny $ABD$, kwadrat $BEFC$ oraz kwadrat $ACGH$. Wykaż, że kąt $EDH$ jest kątem prostym.




zobacz dowód 259

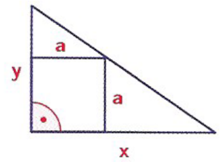
**DOWÓD 287** R

Udowodnij, że długość środkowej $d$ trójkąta o bokach $a$, $b$, $c$ opadającej na bok $c$ można wyrazić wzorem $d=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}$.

zobacz dowód 260

**DOWÓD 288** | P

Dany jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych $x$ i $y$. W trójkąt wpisano kwadrat o boku $a$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $a = \dfrac{xy}{x+y}$.




zobacz dowód 261

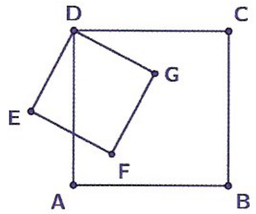
**DOWÓD 289** | R

Dany jest czworokąt $ABCD$, który nie ma par boków równoległych. Punkt $K$ jest środkiem boku $AB$, a punkt $L$ jest środkiem boku $CD$. Natomiast punkty $M$ i $N$ są odpowiednio środkami przekątnych $AC$ i $BD$. Wykaż, że $NL \parallel MK$.

zobacz dowód 262

**DOWÓD 290** | P

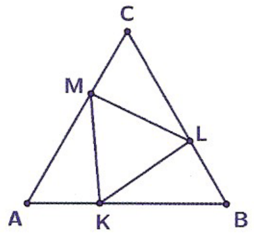
Dane są dwa różne kwadraty $ABCD$ oraz $DEFG$ o wspólnym wierzchołku $D$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AE| = |GC|$.




zobacz dowód 263

**DOWÓD 291** | P

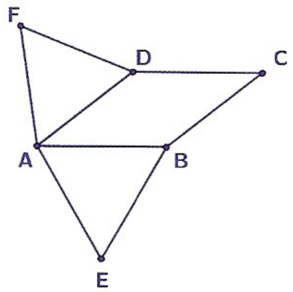
Na bokach trójkąta równobocznego $ABC$ leżą punkty $K$, $L$, $M$ w taki sposób, że punkt $K$ leży na boku $AB$, punkt $L$ leży na boku $BC$, a punkt $M$ leży na boku $AC$ oraz zachodzi równość $|AK| = |BL| = |CM|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt $KLM$ jest równoboczny.




zobacz dowód 264

**DOWÓD 292** | P

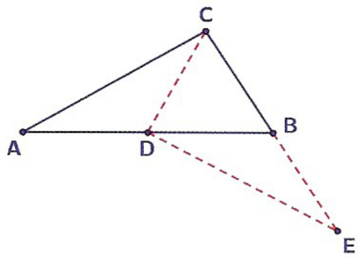
Dany jest równoległobok $ABCD$. Na boku $AB$ oraz na boku $AD$ zbudowano trójkąty równoboczne $AEB$ i $ADF$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że trójkąt $ECF$ jest równoboczny.




zobacz dowód 265

**DOWÓD 293** | P

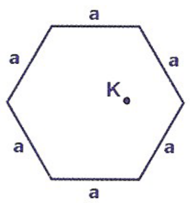
Dany jest trójkąt $ABC$, w którym punkt $D$ jest środkiem boku $AB$ oraz $|BC| = |DC|$. Bok $BC$ przedłużono w ten sposób, że $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AC| = |DE|$.




zobacz dowód 266

**DOWÓD 294** | P

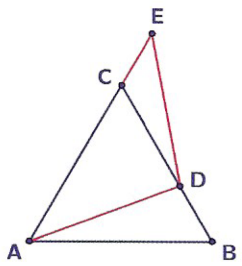
We wnętrzu sześciokąta foremnego o boku długości $a$ umieszczono punkt $K$ (zobacz rysunek). Wykaż, że suma wszystkich odległości punktu $K$ od poszczególnych boków wynosi $3\sqrt{3}\,a$.




zobacz dowód 267

**DOWÓD 295** | P

Trójkąt $ABC$ jest równoboczny. Na boku $BC$ obrano punkt $D$ oraz przedłużono bok $AC$ do punktu $E$ tak, że $|AD| = |DE|$. Wykaż, że $|BD| = |CE|$.

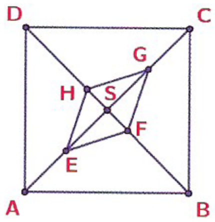


**DOWÓD 296** P

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o długościach przyprostokątnych $a$ i $b$ oraz przeciwprostokątnej długości $c$, promień $r$ okręgu wpisanego w ten trójkąt można wyrazić wzorem $r = \frac{a+b-c}{2}$.

**DOWÓD 297** P

Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $S$. Punkty $E$ i $G$ są środkami odcinków odpowiednio $AS$ i $SC$, a punkty $F$ i $H$ leżą na przekątnej $DB$ i spełniają warunki: $|DH| = 2|HS|$ i $|FB| = 2|SF|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{ABCD} = 6P_{EFGH}$.




zobacz dowód 268

**DOWÓD 298** R

Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg. Dwusieczne tego czworokąta przecinają się w punktach $KLMN$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.