2. WŁASNOŚCI PODSTAWOWYCH FIGUR PŁASKICH

2.1 TRÓJKĄTY

DEFINICJE I TWIERDZENIA

NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA

W dowolnym trójkącie długość każdego boku jest mniejsza od sumy długości pozostałych dwóch boków.

SUMA KĄTÓW TRÓJKĄTA

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°.

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

Cecha bbb. Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Cecha bkb. Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Cecha kbk. Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

Oznaczenie. $\Delta ABC \equiv \Delta KLM$ – trójkąty ABC i KLM są przystające.

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

Cecha bbb. Jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Cecha bkb. Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Cecha kkk. Jeśli kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Oznaczenie. $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ – trójkąty ABC i KLM są podobne.

TWIERDZENIE O ODCINKU ŁĄCZĄCYM ŚRODKI BOKÓW TRÓJKĄTA

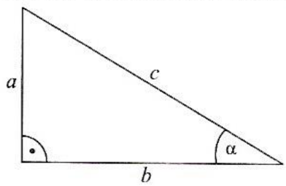
Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i ma długość równą połowie długości tego boku.

TWIERDZENIE PITAGORASA

Twierdzenie Pitagorasa. W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

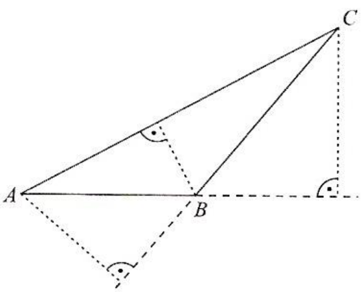
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM



Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$.

WYSOKOŚĆ TRÓJKĄTA

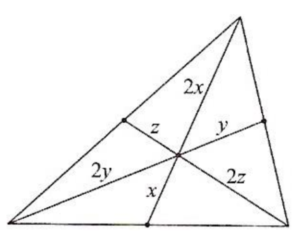


Definicja. Wysokością trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok i prostopadły do tej prostej.

Ortocentrum trójkąta. Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zwanym ortocentrum trójkąta.

Wysokość trójkąta równobocznego. Wysokość trójkąta równobocznego o boku a: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ŚRODKOWA TRÓJKĄTA

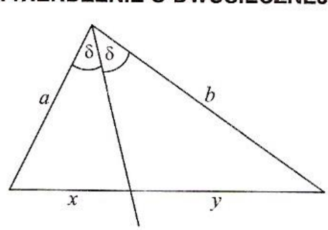


Definicja. Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Twierdzenie o środkowych trójkąta. Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$.

Środek ciężkości trójkąta. Punkt przecięcia środkowych nazywamy środkiem ciężkości trójkąta.

TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ KĄTA W TRÓJKĄCIE



Dwusieczna kąta trójkąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

ZALEŻNOŚCI MIĘDZY KĄTAMI I BOKAMI TRÓJKĄTA

Jeżeli dwa boki trójkąta mają różną długość, to kąt przeciwległy dłuższemu bokowi ma większą miarę niż kąt przeciwległy krótszemu bokowi.

TO WARTO WIEDZIEĆ

⇒ Mając dane w trójkącie prostokątnym

- dwa jego boki, możemy obliczyć trzeci bok i wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta.
- bok i jeden kąt ostry, możemy obliczyć pozostałe boki i drugi kąt ostry trójkąta.
- stosunki długości jego boków, możemy obliczyć wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej jego kątów ostrych.

⇒ Jeśli dwa trójkąty są podobne, to stosunki ich obwodów, odpowiednich wysokości, środkowych, itp. są równe stosunkom odpowiednich boków.

ZADANIA

nierówność trójkąta

1. Rozstrzygnij, czy można zbudować trójkąt o bokach długości
a) 3, 4, 8; b) 7, 9, 16; c) 2, 98, 99.

2.* Znajdź te wartości a, dla których liczby 3, 4 i a są długościami boków pewnego trójkąta.

3. Czy długości boków trójkąta mogą być w stosunku 4 : 7 : 11?

4. Dwa boki trójkąta równoramiennego mają długości odpowiednio a i b. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli a) $a=2,\ b=3$; b) $a=2,\ b=5$.

5.* Wykaż, że suma odległości każdego punktu wewnętrznego trójkąta od wierzchołków trójkąta jest większa od połowy obwodu trójkąta.

6.** Wykaż, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego
a) jest mniejsza od obwodu tego czworokąta;
b) jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

7.*** Wykaż, że jeśli P jest punktem wewnętrznym trójkąta ABC, to prawdziwa jest nierówność $|AP| + |BP| < |AC| + |BC|$.

suma kątów trójkąta

8.* Przez jeden z wierzchołków trójkąta poprowadź prostą równoległą do przeciwległego boku, a następnie udowodnij, że suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°.

9. W trójkącie ABC miara kąta B jest o 10° większa od miary kąta A, zaś miara kąta C jest o 70° większa od miary kąta B. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

10. Oblicz miary α, β, γ kątów trójkąta, jeśli wiadomo, że $\alpha = 2\beta$ i $\alpha = 6\gamma$.

11. Wykaż, że jeżeli suma miar dwóch kątów trójkąta jest równa mierze trzeciego kąta, to trójkąt jest prostokątny.

12. Dwa kąty trójkąta mają miary 30° i 50°. Oblicz miarę kąta, jaki tworzy dwusieczna trzeciego kąta z wysokością poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

13. Kąty między bokiem trójkąta ostrokątnego, a wysokościami opuszczonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 20° (α) i 40° (β). Znajdź miary kątów trójkąta.

14.* Punkt D jest ortocentrum ostrokątnego trójkąta ABC, a miara kąta ADB jest równa 130° (α). Oblicz miarę kąta C tego trójkąta.

15. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC i jest dwa razy krótsza od boku AB. Znajdź kąty tego trójkąta.

16.* W trójkącie ABC bok AB jest dwa razy dłuższy od środkowej CD. Oblicz miarę kąta C.

17.* Oblicz miary kątów trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$), w którym dwusieczna kąta BAC tworzy z bokiem BC kąt 60°. Rozważ dwa przypadki.

18.* Dwusieczna kąta A trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie K. Oblicz miary kątów A i B tego trójkąta wiedząc, że $|AK| = |BK|$ i $|\angle C| = \alpha$.

19.* Prosta k jest równoległa do jednego z boków trójkąta ostrokątnego i przecina pozostałe dwa boki. Kąty rozwarte, jakie tworzy prosta k z bokami trójkąta, mają miary 110° i 130°. Oblicz miary kątów trójkąta.

20.* Wykaż, że w trójkącie, który nie jest równoboczny, co najmniej jeden z kątów ma miarę mniejszą od 60° i co najmniej jeden z kątów ma miarę większą od 60°.

21.* Dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w punkcie D. Oblicz miarę kąta ACB wiedząc, że $|\angle ADB| = 100^\circ$ (α).

22.** Dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC przecinają się w punkcie S. Wykaż, że trójkąt ASB jest rozwartokątny.

23.** Wykaż, że jeśli M jest punktem wewnętrznym trójkąta ABC, to miara kąta AMB jest większa od miary kąta ACB.

24.** W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i na jej przedłużeniu obrano punkty K i L tak, że $|AK| = |AC|$ oraz $|BL| = |BC|$. Oblicz miarę kąta KCL.

25.** Punkt K należący do wnętrza kwadratu $ABCD$ połączono odcinkami z wierzchołkami kwadratu. Oblicz kąty trójkąta ABK wiedząc, że trójkąt CDK jest równoboczny.

przystawanie trójkątów

26. Wykaż, że przekątna równoległoboku dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające.

27.* Na bokach AB, BC i AC trójkąta równobocznego ABC wybieramy odpowiednio punkty D, E i F tak, że $|AD| = |BE| = |CF|$. Udowodnij, że trókąt DEF jest równoboczny.

28.* Wykaż, że każdy punkt dwusiecznej kąta wypukłego jest równooddalony od ramion kąta.

29.* W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Wykaż, że punkty B i C są równooddalone od prostej AD.

30.* Dwusieczne kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego przecinają ramiona AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że odcinki AL i BK mają równe długości.

31.* Wykaż, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy wierzchołku dzieli podstawę na połowy.

32.* Wykaż, że trójkąt którego wierzchołkami są środki boków trójkąta równoramiennego, też jest równoramienny.

33.* W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) punkt S jest środkiem boku BC. Prosta DS przecina prostą AB w punkcie K. Wykaż, że trójkąt DSC jest przystający do trójkąta BKS.

34. Odcinki AB i KL przecinają się w punkcie S, który jest środkiem obu odcinków. Wykaż, że a) trójkąty LAS i KBS są przystające;
b)* trójkąty LAK i KBL są przystające.

35.** Każdy z boków trójkąta ma inną długość. Wykaż, że trójkąta tego nie można podzielić prostą na dwa trójkąty przystające.

podobieństwo trójkątów, twierdzenie Talesa

36. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AP i CQ. Wykaż, że trójkąty ABP i BCQ są podobne.

37.* Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 1 i 2. Oblicz długości boków tego trójkąta.

38.* W trójkącie ABC suma długości wysokości AD i BE wynosi 7, $|AC|=6$, $|BC|=8$. Oblicz $|AD|$ i $|BE|$.

39.** Wykaż, że środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

40. Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 10 i 14. Oblicz obwód trójkąta podobnego do danego, którego najkrótszy bok ma długość 9.

41. Stosunek długości boków danego trójkąta wynosi 3 : 4 : 6. Oblicz długości boków trójkąta podobnego do danego, którego obwód wynosi 26.

42. W dwóch trójkątach równoramiennych kąty przy podstawie mają równe miary. Podstawa i ramię w jednym z nich mają długość odpowiednio 5 i 8, a obwód drugiego trójkąta wynosi 35. Oblicz długość podstawy i ramienia drugiego trójkąta.

43. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono boki BC i AD do przecięcia w punkcie O. Oblicz długość odcinka OC, gdy $|AD|=12$, $|OD|=15$, $|BC|=13$.

44.* W trójkącie ABC, którego boki BC, CA, AB mają odpowiednio długości a, b, c, poprowadzono równolegle do boku AB prostą przecinającą bok AC w punkcie D, a bok BC w punkcie E. Wiedząc, że $|AD|=|CE|$, oblicz długość odcinka DE.

45.* W trójkącie ABC mamy dane $|AB|=24$, $|BC|=18$, $|AC|=12$. Prosta DE równoległa do boku AC odcina na bokach AB i AC odcinki AD i CE takie, że $|AD|+|CE|=15$. Oblicz długość odcinka DE.

46.* W trójkąt ABC o podstawie AB długości 60 i wysokości CD długości 20 wpisano prostokąt tak, że dłuższy bok prostokąta zawiera się w podstawie trójkąta. Stosunek boków prostokąta wynosi 5 : 9. Oblicz długości boków prostokąta.

47. W trójkącie ABC miara kąta ACB jest dwa razy większa od miary kąta CAB. Dwusieczna kąta ACB dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty. Uzasadnij, że jeden z otrzymanych trójkątów jest podobny do trójkąta ABC.

48.* W trapezie $KLMN$ punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Oblicz długość podstawy KL wiedząc, że $|MN|=3$, $|MP|=2$ i $|PK|=5$.

49.* Podstawy trapezu mają długość 6 (a) i 2 (b), a wysokość ma długość 4 (h). Oblicz odległość punktu przecięcia przekątnych trapezu od jego podstaw.

50.* W trapezie równoramiennym $ABCD$ krótsza podstawa CD ma długość 4. Wysokość DE trapezu przecina przekątną AC w punkcie M tak, że $|MC|:|AM|=2:3$. Oblicz długość drugiej podstawy.

51.* Bok AB równoległoboku $ABCD$ ma długość 48. Na boku BC obrano taki punkt E, że $|BE|:|EC|=5:6$, a następnie poprowadzono prostą DE przecinającą przedłużenie podstawy AB w punkcie F. Oblicz długość odcinka BF.

52.** W równoległobok, którego przekątne mają długości 10 i 15, wpisano romb w ten sposób, że boki rombu są równoległe do przekątnych równoległoboku. Oblicz długość boku rombu.

53.** Oblicz długość boku rombu wiedząc, że prosta poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków odcina na przedłużeniach dwu boków odcinki o dł. 4 i 9.

54.*** Przez punkt przecięcia przekątnych trapezu o podstawach a i b poprowadzono prostą równoległą do podstaw, przecinającą ramiona w punktach K i L. Oblicz długość odcinka KL.

55.** W trapezie $ABCD$ ramię AD i podstawa CD mają długość 4 (c), a ramię BC i przekątna AC mają długość 6 (d). Oblicz długość podstawy AB.

56.*** W trójkącie ABC przez dowolny punkt A' środkowej AD prowadzimy równolegle do boku AB prostą przecinającą bok BC w punkcie B', a równolegle do boku CA prowadzimy prostą przecinającą bok BC w punkcie C'. Wykaż, że $A'D$ jest środkową trójkąta $A'B'C'$.

57.*** W trapezie $ABCD$ o podstawie AB przez punkt O przecięcia przekątnych prowadzimy dwie proste równoległe do boków BC i DA, przecinające podstawę AB odpowiednio w punktach A' i B'. Udowodnij, że $|AA'|=|BB'|$.

58.*** Wierzchołek A kwadratu $ABCD$ połączono ze środkami E i F boków BC i DC. Wykaż, że odcinki AE i AF dzielą przekątną BD na trzy równe części.

59.*** Boki AC i AB trójkąta ABC mają odpowiednio długości b i c. Dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie D takim, że $|AD|=|BD|$. Oblicz długość boku BC.

60.* Wykaż, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i ma długość równą połowie długości tego boku.

61.* Punkty K, L, M są środkami boków trójkąta ABC. Wykaż, że trójkąty ABC i KLM są podobne.

62.** W trójkącie ABC bok BC jest dwa razy dłuższy od boku AC, zaś bok AB ma długość a. Punkt K należy do boku BC, przy czym $|CK|:|KB|=1:3$. Oblicz długość odcinka AK.

63.*** Środkowa CD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty. Wykaż, że jeśli trójkąty ADC i DBC są podobne do trójkąta ABC, to trójkąt ABC jest równoramienny prostokątny.

64. Odcinki AK i BL są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt S punktem ich przecięcia. Wykaż, że podobne są trójkąty a) LAS i BKS;
b)*** ABC i CKL.

65.*** Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ odłożono odpowiednio odcinki BE i BF takie, że $|BE| = |BF|$. Niech G będzie rzutem prostokątnym punktu B na prostą CE. Wykaż, że trójkąty BFG i CDG są podobne.

66.** W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów udowodnij twierdzenie Pitagorasa.

twierdzenie Pitagorasa

67. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny
a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$; b) $7, 24, 25$; c) $12, 35, 37$.

68. W ostrokątnym trójkącie równoramiennym ramię ma długość 61, a wysokość poprowadzona do ramienia ma długość 11. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

69. Dwa boki trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 15. Oblicz długość trzeciego boku.

70. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość a i jest pięć razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz długość środkowej poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej.

71.* Jeden z boków trójkąta ma długość 42, a długości wysokości i środkowej poprowadzonych do tego boku są równe odpowiednio 8 i 17. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

72.* Środkowe trójkąta prostokątnego poprowadzone do przyprostokątnych mają długości p i q. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

73.* Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 5 i 12. Przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono prostą k, która dzieli dany trókąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź długości odcinków, na jakie prosta k dzieli przeciwprostokątną.

74.* Znajdź wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzoną do przeciwprostokątnej mając dane jego przyprostokątne 5 (a) i 12 (b).

75.* Punkt K należący do boku AB prostokąta $ABCD$ połączono odcinkami z wierzchołkami C i D. Oblicz długości boków prostokąta wiedząc, że $|DK| = 15$, $|KC| = 20$, a kąt DKC jest prosty.

76.** Ramię ostrokątnego trójkąta równoramiennego ma długość 5 (b), zaś podstawa długość 6 (a). Wyznacz odległość punktu przecięcia wysokości trójkąta od podstawy.

77.** W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 10 (a) i 15 (b) poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Oblicz długość odcinka, który jest częścią wspólną tej dwusiecznej i danego trójkąta.

78.** W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC mają odpowiednio długości 15 i 14. Oblicz długości odcinków, na jakie ortocentrum trójkąta dzieli wysokość AK, jeśli wysokość ta ma długość 12.

funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

79. Jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego ma miarę α, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość h. Oblicz długości boków tego trójkąta.

80. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość d, a kąt między ramionami ma miarę α. Oblicz długość podstawy tego trójkąta

81. Dwa boki trójkąta mają długości 6 i 4, a kąt między tymi bokami ma miarę 60°. Oblicz długość trzeciego boku.

82. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C trójkąta ABC ma długość h. Kąty BAC i ABC są ostre i mają odpowiednio miary α i β. Oblicz obwód trójkąta ABC.

83.* W trójkącie KLM bok LM ma długość $4\sqrt{3}$, kąt KLM ma miarę 120°, zaś kąt KML ma miarę 15°. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

84. W równoramiennym trójkącie prostokątnym poprowadzono środkową do przyprostokątnej. Oblicz kosinus kąta ostrego utworzonego przez tę środkową i przyprostokątną, do której została poprowadzona.

85.* W trójkącie równoramiennym stosunek podstawy do wysokości poprowadzonej do podstawy jest równy $2\sqrt{3}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

86.* Obwód trójkąta równobocznego ABC jest równy 9. Punkt K należy do boku BC i $|BK|=2$. Oblicz tangens kąta BAK.

87.** Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB|=4$ i $|BC|=2\sqrt{3}$.

88.** Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A, że $|AM|:|AL|=2:1$. Wyznacz sinus kąta LKA.

89.** Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Oblicz sinus kąta przy wierzchołku trójkąta.

90.** Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu podstawy ostrokątnego trójkąta równoramiennego od jego ramion jest równa długości wysokości opuszczonej na ramię.

twierdzenie o środkowych trójkąta

91. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8, a wysokość poprowadzona z wierzchołka trójkąta ma długość 9. Jakie długości mają środkowe tego trójkąta?

92.* Środkowe trójkąta ABC ($|AC| = |BC|$) poprowadzone z wierzchołków A i B mają długość 3 i przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód trójkąta ABC.

93.* Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$). Znajdź tangens kąta przy podstawie tego trójkąta wiedząc, że $|\angle ASB| = \alpha$.

94.* Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi $3:8$ $(m:n)$ $(m<n)$. Oblicz odległość środka ciężkości trójkąta od dłuższej przyprostokątnej, jeśli środkowa poprowadzona do tej przyprostokątnej ma długość 15 (s).

95.* Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość a. Oblicz długość środkowej poprowadzonej do podstawy.

96.** Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Oblicz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość 3 (d).

97.** W trójkącie ABC, gdzie $|AC| = |BC| = \sqrt{10}$, środkowe poprowadzone z wierzchołków A oraz B przecinają się pod kątem 90°. Znajdź długość podstawy tego trójkąta.

98.** Środkowe trójkąta o obwodzie d mają długości p, q, r. Wykaż, że $p+q+r>\frac{3}{4}d$.

99.** Wykaż, że jeżeli dwie środkowe trójkąta mają równe długości, to trójkąt jest równoramienny.

twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

100. Boki AB, BC, AC trójkąta ABC mają długości równe odpowiednio 4 (a), 6 (b), 5 (c). Oblicz długości odcinków, na jakie dzieli bok AC dwusieczna kąta ABC.

101. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 3 (a), a ramię długość 6 (b). Oblicz długości odcinków, na jakie dzieli ramię dwusieczna kąta przy podstawie.

102. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 24 i 32. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta między przeciwprostokątną i krótszą przyprostokątną dzieli dłuższą przyprostokątną.

103.* Przyprostokątna BC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 6, a przeciwprostokątna AB długość 10. Oblicz tangens kąta, jaki tworzy dwusieczna kąta ABC z przeciwprostokątną trójkąta.

104.* Dwa boki trójkąta mają długości 7 (a) i 10 (b) ($b > a$). Oblicz długość trzeciego boku wiedząc, że dwusieczna przeciwległego kąta dzieli ten bok na odcinki, z których jeden jest o 2 (d) dłuższy od drugiego.

105.* Dwusieczna jednego z kątów trójkąta o obwodzie 21 (p) dzieli przeciwległy bok na odcinki o długości 3 (a) i 4 (b). Oblicz długości boków trójkąta.

106.** Dwa boki trójkąta mają długość 6 i 9. Trzeci bok jest podzielony dwusieczną przeciwległego kąta na odcinki, z których jeden ma długość równą długości jednego z danych boków. Oblicz długość trzeciego boku.

107.** W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i CB jest równy $4:3$, poprowadzono dwusieczne kątów ADB i BDC. Dwusieczne te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M. Oblicz tangens kąta BKM.

108.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których stosunek długości wynosi $1:2$. W jakim stosunku wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną?

109.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 15 i 20. W trójkącie tym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego oraz dwusieczne kątów wyznaczonych przez tę wysokość i przyprostokątne. Oblicz odległość między punktami przecięcia tych dwusiecznych z przeciwprostokątną.

110.*** W trójkącie ABC poprowadzono środkową CK, a następnie poprowadzono dwusieczne kątów AKC i BKC, które przecinają boki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że trójkąty ABC i PQC są podobne.