# Rozwiązania zadań ze sprawdzianu

# Zadanie 1

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo, że w tych rzutach uzyskamy różne wyniki wynosi:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{35}{36}$

# Zadanie 1

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo, że w tych rzutach uzyskamy różne wyniki wynosi:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{35}{36}$

Prawdopodobieństwo, że będzie taki sam wynik wynosi $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

# Zadanie 1

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo, że w tych rzutach uzyskamy różne wyniki wynosi:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{35}{36}$

Prawdopodobieństwo, że będzie taki sam wynik wynosi $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (pierwsza kostka - 6 możliwości, druga kostka - jedna możlwiość, musi być to samo, co na pierwszej).

# Zadanie 1

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo, że w tych rzutach uzyskamy różne wyniki wynosi:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{35}{36}$

Prawdopodobieństwo, że będzie taki sam wynik wynosi $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (pierwsza kostka - 6 możliwości, druga kostka - jedna możlwiość, musi być to samo, co na pierwszej). Czyli różne wyniki $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, odpowiedź **C**.

# Zadanie 2

Rzucamy sześć razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że wypadnie więcej niż jeden orzeł wynosi

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{21}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{63}{64}$

# Zadanie 2

Rzucamy sześć razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że wypadnie więcej niż jeden orzeł wynosi

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{21}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{63}{64}$

Liczymy zdarzenie przeciwne - ani jeden orzeł ($A$) lub jeden orzeł ($B$).
$|\Omega| = 2^6 = 64$,

# Zadanie 2

Rzucamy sześć razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że wypadnie więcej niż jeden orzeł wynosi

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{21}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{63}{64}$

Liczymy zdarzenie przeciwne - ani jeden orzeł ($A$) lub jeden orzeł ($B$).
$|\Omega| = 2^6 = 64$, $|A| = 1$,

# Zadanie 2

Rzucamy sześć razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że wypadnie więcej niż jeden orzeł wynosi

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{21}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{63}{64}$

Liczymy zdarzenie przeciwne - ani jeden orzeł ($A$) lub jeden orzeł ($B$). $|\Omega| = 2^6 = 64$, $|A| = 1$, $|B| = 6$ (wybieramy miejsce dla orła). Daje to w sumie 7 możlwości. Czyli $P(A \cup B) = \frac{7}{64}$, co daje $P((A \cup B)') = \frac{57}{64}$, odpowiedź **C**.

# Zadanie 3

$A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi. Oblicz prawdopodobieństwo $P(B - A)$, wiedząc, że $P(A) = 0.3$ oraz $P(A' \cup B) = 0.82$. Jako odpowiedź zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

# Zadanie 3

$A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi. Oblicz prawdopodobieństwo $P(B-A)$, wiedząc, że $P(A) = 0.3$ oraz $P(A' \cup B) = 0.82$. Jako odpowiedź zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Konieczny rysunek!

# Zadanie 3

$A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi. Oblicz prawdopodobieństwo $P(B - A)$, wiedząc, że $P(A) = 0.3$ oraz $P(A' \cup B) = 0.82$. Jako odpowiedź zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Konieczny rysunek! Z niego od razu zauważamy, że $P(A - B) = 0.18$, czyli $P(A \cap B) = 0.3 - 0.18 = 0.12$.

## Zadanie 3

$A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi. Oblicz prawdopodobieństwo $P(B - A)$, wiedząc, że $P(A) = 0.3$ oraz $P(A' \cup B) = 0.82$. Jako odpowiedź zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Konieczny rysunek! Z niego od razu zauważamy, że $P(A - B) = 0.18$, czyli $P(A \cap B) = 0.3 - 0.18 = 0.12$. Skoro zdarzenia są niezależne, to $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, to daje nam $P(B) = 0.4$,

# Zadanie 3

$A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi. Oblicz prawdopodobieństwo $P(B - A)$, wiedząc, że $P(A) = 0.3$ oraz $P(A' \cup B) = 0.82$. Jako odpowiedź zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Konieczny rysunek! Z niego od razu zauważamy, że $P(A - B) = 0.18$, czyli $P(A \cap B) = 0.3 - 0.18 = 0.12$. Skoro zdarzenia są niezależne, to $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, to daje nam $P(B) = 0.4$, a $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.28$.

# Zadanie 4

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

# Zadanie 4

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

Rozważamy różne opcje $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6 = 2 \times 3 \times 3$.

# Zadanie 4

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

Rozważamy różne opcje $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6 = 2 \times 3 \times 3$.

- 2 i 9 oraz osiem 1: $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$

# Zadanie 4

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

Rozważamy różne opcje $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6 = 2 \times 3 \times 3$.

- 2 i 9 oraz osiem 1: $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$
- 3 i 6 oraz osiem 1 (tak samo, jak wyżej): $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$

## Zadanie 4

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

Rozważamy różne opcje $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6 = 2 \times 3 \times 3$.

- 2 i 9 oraz osiem 1: $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$
- 3 i 6 oraz osiem 1 (tak samo, jak wyżej): $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$
- dwie 2 i 3 oraz siedem 1: $\binom{10}{2}\binom{8}{1}\binom{7}{7} = 360$

# Zadanie 4

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?

Rozważamy różne opcje $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6 = 2 \times 3 \times 3$.

- 2 i 9 oraz osiem 1: $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$
- 3 i 6 oraz osiem 1 (tak samo, jak wyżej): $\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8} = 90$
- dwie 2 i 3 oraz siedem 1: $\binom{10}{2}\binom{8}{1}\binom{7}{7} = 360$

Ostatecznie mamy $90 + 90 + 360 = 540$ takich liczb.

# Zadanie 5

10 osób, w skład których wchodzi 5 par małżeńskich, zostało ustawionych w rzędzie w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
(a) każdy mąż stoi obok swojej żony,
(b) jedna z par stoi na skrajnych miejscach (mąż na jednym końcu, żona na drugim).

# Zadanie 5

10 osób, w skład których wchodzi 5 par małżeńskich, zostało ustawionych w rzędzie w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
(a) każdy mąż stoi obok swojej żony,
(b) jedna z par stoi na skrajnych miejscach (mąż na jednym końcu, żona na drugim).

(a) Sklejemy małżeństwa i ustawiamy w linii na 5! sposobów, wewnątrz **każdego** małżeństwa możemy jeszcze zamienić miejscami osoby, co daje $5! \times 2^5$.

# Zadanie 5

10 osób, w skład których wchodzi 5 par małżeńskich, zostało ustawionych w rzędzie w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
(a) każdy mąż stoi obok swojej żony,
(b) jedna z par stoi na skrajnych miejscach (mąż na jednym końcu, żona na drugim).

(a) Sklejemy małżeństwa i ustawiamy w linii na 5! sposobów, wewnątrz **każdego** małżeństwa możemy jeszcze zamienić miejscami osoby, co daje $5! \times 2^5$.
(b) Wybieramy parę - 5 sposobów,

# Zadanie 5

10 osób, w skład których wchodzi 5 par małżeńskich, zostało ustawionych w rzędzie w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
(a) każdy mąż stoi obok swojej żony,
(b) jedna z par stoi na skrajnych miejscach (mąż na jednym końcu, żona na drugim).

(a) Sklejemy małżeństwa i ustawiamy w linii na 5! sposobów, wewnątrz **każdego** małżeństwa możemy jeszcze zamienić miejscami osoby, co daje $5! \times 2^5$.
(b) Wybieramy parę - 5 sposobów, ustawiamy na skrajnych miejscach - 2 sposoby,

# Zadanie 5

10 osób, w skład których wchodzi 5 par małżeńskich, zostało ustawionych w rzędzie w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
(a) każdy mąż stoi obok swojej żony,
(b) jedna z par stoi na skrajnych miejscach (mąż na jednym końcu, żona na drugim).

(a) Sklejemy małżeństwa i ustawiamy w linii na 5! sposobów, wewnątrz **każdego** małżeństwa możemy jeszcze zamienić miejscami osoby, co daje $5! \times 2^5$.
(b) Wybieramy parę - 5 sposobów, ustawiamy na skrajnych miejscach - 2 sposoby, ustawiamy pozostałe 8 osób - 8! sposobów.

# Zadanie 5

10 osób, w skład których wchodzi 5 par małżeńskich, zostało ustawionych w rzędzie w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
(a) każdy mąż stoi obok swojej żony,
(b) jedna z par stoi na skrajnych miejscach (mąż na jednym końcu, żona na drugim).

(a) Sklejemy małżeństwa i ustawiamy w linii na 5! sposobów, wewnątrz **każdego** małżeństwa możemy jeszcze zamienić miejscami osoby, co daje $5! \times 2^5$.
(b) Wybieramy parę - 5 sposobów, ustawiamy na skrajnych miejscach - 2 sposoby, ustawiamy pozostałe 8 osób - 8! sposobów. Ostatecznie $5 \times 2 \times 8!$.

# Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

## Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

$A$ - więcej biały niż czarnych, $B$ co najmniej jedną czarną.

# Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

$A$ - więcej biały niż czarnych, $B$ co najmniej jedną czarną. Szukamy $P(A|B)$, czyli $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

# Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

$A$ - więcej biały niż czarnych, $B$ co najmniej jedną czarną. Szukamy $P(A|B)$, czyli $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$$|\Omega| = \binom{11}{5} = 462,$$

# Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

$A$ - więcej biały niż czarnych, $B$ co najmniej jedną czarną. Szukamy $P(A|B)$, czyli $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$$|\Omega| = \binom{11}{5} = 462,\ |B| = \binom{11}{5} - \binom{5}{5} = 461,$$

# Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

$A$ - więcej biały niż czarnych, $B$ co najmniej jedną czarną. Szukamy $P(A|B)$, czyli $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$$|\Omega| = \binom{11}{5} = 462,\ |B| = \binom{11}{5} - \binom{5}{5} = 461,$$
$$|A \cap B| = \binom{5}{4}\binom{6}{1} + \binom{5}{3}\binom{6}{2} = 180.$$

# Zadanie 6

W urnie jest 5 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano więcej kul białych niż czarnych, jeśli wiadomo, że wylosowano co najmniej jedną czarną kulę.

$A$ - więcej biały niż czarnych, $B$ co najmniej jedną czarną. Szukamy $P(A|B)$, czyli $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$$|\Omega| = \binom{11}{5} = 462,\ |B| = \binom{11}{5} - \binom{5}{5} = 461,$$
$$|A \cap B| = \binom{5}{4}\binom{6}{1} + \binom{5}{3}\binom{6}{2} = 180.$$

$$P(A|B) = \frac{180}{461}$$

# Zadanie 7

W urnie A są dwie kule białe, dwie czarne i cztery niebieskie. W urnie B jest jedna kula biała i trzy czarne. Doświadczenie polega na wylosowaniu dwóch kul z urny A i przełożeniu ich do urny B, po czym wylosowaniu jednej kuli z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo, że kula wylosowana z urny B jest biała.

# Zadanie 7

W urnie A są dwie kule białe, dwie czarne i cztery niebieskie. W urnie B jest jedna kula biała i trzy czarne. Doświadczenie polega na wylosowaniu dwóch kul z urny A i przełożeniu ich do urny B, po czym wylosowaniu jednej kuli z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo, że kula wylosowana z urny B jest biała.

Rysujemy drzewko, pierwsze losowanie z urny $A$. Interesuje nas tylko ile będzie biały. Dostajemy 3 gałęzie: 0 białych, 1 biała, 2 białe.

$P(0b) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28},$

# Zadanie 7

W urnie A są dwie kule białe, dwie czarne i cztery niebieskie. W urnie B jest jedna kula biała i trzy czarne. Doświadczenie polega na wylosowaniu dwóch kul z urny A i przełożeniu ich do urny B, po czym wylosowaniu jednej kuli z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo, że kula wylosowana z urny B jest biała.

Rysujemy drzewko, pierwsze losowanie z urny $A$. Interesuje nas tylko ile będzie biały. Dostajemy 3 gałęzie: 0 białych, 1 biała, 2 białe.

$P(0b) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$, $P(1b) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{12}{28}$,

## Zadanie 7

W urnie A są dwie kule białe, dwie czarne i cztery niebieskie. W urnie B jest jedna kula biała i trzy czarne. Doświadczenie polega na wylosowaniu dwóch kul z urny A i przełożeniu ich do urny B, po czym wylosowaniu jednej kuli z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo, że kula wylosowana z urny B jest biała.

Rysujemy drzewko, pierwsze losowanie z urny $A$. Interesuje nas tylko ile będzie biały. Dostajemy 3 gałęzie: 0 białych, 1 biała, 2 białe.

$$P(0b) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28},\ P(1b) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{12}{28},\ P(1b) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}$$

# Zadanie 7

W urnie A są dwie kule białe, dwie czarne i cztery niebieskie. W urnie B jest jedna kula biała i trzy czarne. Doświadczenie polega na wylosowaniu dwóch kul z urny A i przełożeniu ich do urny B, po czym wylosowaniu jednej kuli z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo, że kula wylosowana z urny B jest biała.

Rysujemy drzewko, pierwsze losowanie z urny $A$. Interesuje nas tylko ile będzie biały. Dostajemy 3 gałęzie: 0 białych, 1 biała, 2 białe.

$P(0b) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$, $P(1b) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{12}{28}$, $P(1b) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}$

Teraz prawdopodobieństwo wylosowanie białej z drugiej urny wynosi:

$$P(B) = \frac{15}{28} \times \frac{1}{6} + \frac{12}{28} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{28} \times \frac{3}{6} = \frac{42}{168} = \frac{1}{4}$$