PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2017/2018

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R4.1. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$.	**C**

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R11.4. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.	**A**

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	**D**

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R5.3. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.	**B**

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.	**D**

Zadanie 6. (0–2)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: P4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; R5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.	554

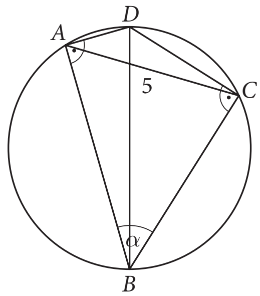
Uwaga. Ocenie podlega tylko odpowiedź zakodowana.

Zadanie 7. (0–3)
W czworokącie *ABCD* dane są: $|AC| = 5$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$, $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
Oblicz długość przekątnej *BD* tego czworokąta.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Przykładowe rozwiązania

<u>Sposób I</u>
Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



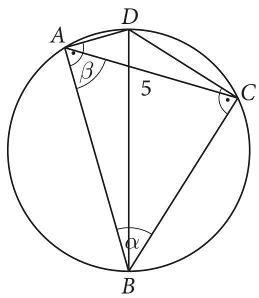
Ponieważ $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| = 180^\circ$, więc na tym czworokącie można opisać okrąg, a przekątna *BD* czworokąta jest jednocześnie średnicą tego okręgu (kąt wpisany prosty jest oparty na średnicy).
Z twierdzenia sinusów w trójkącie *ABC* otrzymujemy:

$$\frac{|AC|}{\sin\alpha} = |BD|,$$

$$\frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = |BD|.$$

Stąd $|BD| = 3\sqrt{5}$.

<u>Sposób II</u>
Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



$|\sphericalangle DAC| = 90^\circ - \beta$ oraz $|\sphericalangle ADC| = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.

Stosujemy twierdzenie sinusów w trójkątach ABC i ACD.

$$\frac{|BC|}{\sin\beta} = \frac{5}{\sin\alpha} \qquad\qquad \frac{|CD|}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{5}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

$$|BC| = 3\sqrt{5}\sin\beta \qquad\qquad |CD| = 3\sqrt{5}\cos\beta$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BCD otrzymujemy:
$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2$,
$|BD|^2 = (3\sqrt{5}\sin\beta)^2 + (3\sqrt{5}\cos\beta)^2$,
$|BD|^2 = 45(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$,
$|BD| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy sporządzi poprawny rysunek.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy sporządzi rysunek i:
- zauważy, że na czworokącie można opisać okrąg, a przekątna BD jest średnicą tego okręgu

albo
- uzależni długości odcinków BC i CD od funkcji trygonometrycznych kąta β:
  $|BC| = 3\sqrt{5}\sin\beta, |CD| = 3\sqrt{5}\cos\beta$,

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **3 pkt**
gdy obliczy długość przekątnej: $|BD| = 3\sqrt{5}$.

Zadanie 8. (0–3)
Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność:
$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \geqslant 0$.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	P2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. R3.7. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

Przykładowe rozwiązania

<u>Sposób I</u>
Lewa strona nierówności jest wielomianem $W(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ o współczynnikach całkowitych. Szukamy pierwiastków tego wielomianu wśród dzielników liczby 9.
$W(-1) = 1 + 4 - 2 - 12 + 9 = 0$
Wykonujemy dzielenie wielomianu W przez dwumian $x + 1$ i otrzymujemy $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.
Teraz szukamy pierwiastków wielomianu $P(x)$ wśród dzielników liczby 9.
$P(-1) = -1 - 5 - 3 + 9 = 0$
Wykonujemy dzielenie wielomianu P przez dwumian $x + 1$ i otrzymujemy $Q(x) = x^2 - 6x + 9$.

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i zapisujemy $Q(x)=(x-3)^2$.
A zatem $W(x)=(x+1)^2(x-3)^2$.
Dla każdej liczby $x\in R$ prawdziwe są nierówności $(x+1)^2\geqslant 0$ i $(x-3)^2\geqslant 0$, a więc prawdziwa jest też nierówność $(x+1)^2(x-3)^2\geqslant 0$, co należało udowodnić.

Sposób II

Przekształcamy lewą stronę nierówności, stosując wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów.

$$x^4-4x^3-2x^2+12x+9=$$
$$=x^4-2x^2+1-4x^3+16x-4x+8=$$
$$=(x^2-1)^2-4x(x-2)(x+2)-4(x-2)=$$
$$=(x-1)^2(x+1)^2-4(x-2)(x^2+2x+1)=$$
$$=(x+1)^2(x^2-2x+1-4x+8)=$$
$$=(x+1)^2(x^2-6x+9)=$$
$$=(x+1)^2(x-3)^2$$

Dla każdej liczby $x\in R$ prawdziwa jest nierówność $(x+1)^2(x-3)^2\geqslant 0$, bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, czego należało dowieść.

Sposób III

Rozważmy funkcję $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+9$.

Wielomian jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych,

a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(1-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)=\infty$,

więc wystarczy wykazać, że najmniejsza wartość wielomianu f jest dodatnia.

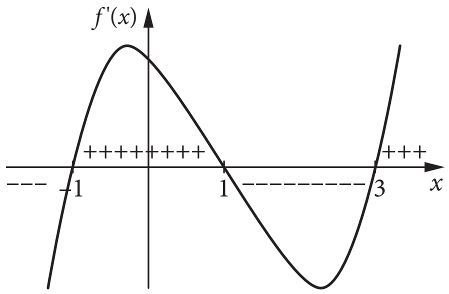
Wyznaczamy funkcję pochodną:

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$,

i obliczamy jej miejsca zerowe.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2-4x+12=0$$
$$4x^2(x-3)-4(x-3)=0$$
$$4(x-1)(x+1)(x-3)=0$$
$$x=1 \text{ lub } x=-1 \text{ lub } x=3$$

Szkicujemy wykres znaku pochodnej.



Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty,-1\rangle$ oraz $\langle 1,3\rangle$ i rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -1,1\rangle$ oraz $\langle 3,\infty)$, więc wartość najmniejszą przyjmuje w jednym z minimów lokalnych, czyli dla $x=-1$ lub $x=3$.

$f(-1)=1+4-2-12+9=0$

$f(3)=81-4\cdot 27-18+36+9=0$

Wartość najmniejsza funkcji f jest równa 0, zatem $f(x)\geqslant 0$ dla $x\in R$, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

- gdy znajdzie przynajmniej 2 pierwiastki wielomianu stopnia czwartego i zapisze ten wielomian w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego

albo

- gdy grupę składników: $x^4 - 2x^2 + 1$ zapisze w postaci: $(x-1)^2(x+1)^2$ lub grupę składników: $-4x^3 + 12x + 8$ rozłoży na czynniki, np. do postaci: $-4(x-2)(x^2+2x+1)$

albo

- gdy wyznaczy funkcję pochodną: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$ i obliczy jej miejsca zerowe: $x \in \{-1, 1, 3\}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

- gdy zapisze nierówność w postaci $(x+1)^2(x-3)^2 \geqslant 0$

albo

- gdy zbada znak pochodnej i ustali argumenty, dla których wielomian może osiągnąć wartość najmniejszą

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **3 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–3)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)} + \frac{1}{\log_3(n+1)} + \frac{1}{\log_4(n+1)} + \ldots + \log_{2018}(n+1)}$$

dla $n \geqslant 1$. Uzasadnij, że wzór ciągu (a_n) można zapisać w postaci: $a_n = \log_{2018!}(n+1)$ i oblicz wartość wyrażenia: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2017}$.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: P6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu. P5.1.Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Przykładowe rozwiązanie

Ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu wynika, że $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$. Zatem wzór ciągu:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)} + \frac{1}{\log_3(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\log_{2018}(n+1)}}$$

można zapisać w postaci:

$$a_n = \frac{1}{\log_{n+1}2 + \log_{n+1}3 + \ldots + \log_{n+1}2018}.$$

Po zastosowaniu wzoru na sumę logarytmów otrzymujemy:

$a_n = \dfrac{1}{\log_{n+1}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2018)}$,

$a_n = \dfrac{1}{\log_{n+1} 2018!}$,

$a_n = \log_{2018!}(n+1)$.

Teraz można obliczyć wartość sumy.

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2017} = \log_{2018!} 2 + \log_{2018!} 3 + \log_{2018!} 4 + \ldots + \log_{2018!} 2018 =$
$= \log_{2018!}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2018) = \log_{2018!} 2018! = 1$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający zapisze wzór ciągu w postaci: $a_n = \dfrac{1}{\log_{n+1} 2 + \log_{n+1} 3 + \ldots + \log_{n+1} 2018}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zapisze wzór ciągu w postaci: $a_n = \log_{2018!}(n+1)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający obliczy wartość wyrażenia $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2017} = 1$.

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie: $2\sin^2 x - \cos 2x = 1$. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań tego równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R6.6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne. P5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów: pierwszy to ustalenie rozwiązań równania trygonometrycznego, a drugi – wyznaczenie sumy wszystkich rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$.

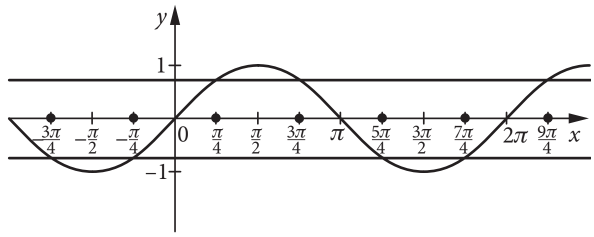
Realizacja pierwszego etapu

<u>Sposób I</u>

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie.

$$2\sin^2 x - \cos 2x = 1$$
$$2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 1$$
$$4\sin^2 x = 2$$
$$\sin^2 x = \frac{2}{4}$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Szkicujemy wykres funkcji sinus, by wyznaczyć wszystkie rozwiązania ostatniej alternatywy.



Zatem wszystkie rozwiązania równania możemy zapisać w postaci: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

<u>Sposób II</u>

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie.

$$2\sin^2 x - \cos 2x = 1$$
$$-\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$-\cos 2x = \cos 2x$$
$$2\cos 2x = 0$$
$$\cos 2x = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Stąd $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Realizacja drugiego etapu

Spośród rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$ wybieramy najmniejsze – jest to $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (dla $k = 0$). Ponieważ każde dwa sąsiednie rozwiązania równania różnią się o $\frac{\pi}{2}$, więc dla kolejnych liczb naturalnych k tworzą one rosnący ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz $a_1 = \frac{\pi}{4}$, a różnica $r = \frac{\pi}{2}$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać:

$$a_n = \frac{\pi}{4} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}.$$

Wyznaczamy liczbę wyrazów tego ciągu znajdujących się w przedziale $\langle 0, 32\pi \rangle$

$$a_n \leqslant 32\pi$$
$$\frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \leqslant 32\pi$$

Po przekształceniu nierówności otrzymujemy warunek:

$$n \leqslant 64{,}5,$$

więc $n \in \{1, 2, 3, ..., 64\}$.

Zatem 64 początkowe wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$. Obliczamy ich sumę.

$$S_{64} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{4} + 63 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \cdot 64 = 1024\pi$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający przekształci równanie do postaci:

- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

albo

- $\cos 2x = 0$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ... **3 pkt**

Zdający poda rozwiązania równania, np. w postaci: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ... **4 pkt**

Zdający obliczy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$: $n = 64$.

Rozwiązanie pełne ... **5 pkt**

Zdający obliczy sumę wszystkich rozwiązań równania trygonometrycznego należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$: $S_{64} = 1024\pi$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający w wyniku przekształceń zapisze tylko jedno z równań $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ albo $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, poda poprawne rozwiązania tego równania i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt.**
2. Jeżeli zdający poda poprawnie rozwiązania tylko jednego z równań: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ albo zapisze równość $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i stąd błędnie wyznaczy rozwiązania równania, to otrzymuje **2 punkty.**
3. Jeżeli zdający rozwiąże tylko jedno z równań $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ albo z każdego z wymienionych równań poda tylko jedną serię wyników i konsekwentnie – stosując własności ciągu arytmetycznego – obliczy sumę wszystkich rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$, to otrzymuje **3 punkty.**

Zadanie 11. (0–5)

Urna zawiera 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Losowano z niej osiem razy ze zwracaniem po jednej kuli i zapisywano wylosowane numery kolejno, od strony lewej do prawej. Zapisane cyfry utworzyły liczbę ośmiocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w doświadczeniu otrzymamy liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych .

Przykładowe rozwiązania

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, jest to zatem model klasyczny.
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. W pierwszym wyznaczymy liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, czyli $|\Omega|$. W drugim etapie obliczymy, na ile sposobów w doświadczeniu losowym można otrzymać liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka, czyli $|A|$. W trzecim etapie wyznaczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Realizacja pierwszego etapu

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie ośmiowyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, czyli wariacje z powtórzeniami. Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego jest zatem równa:

$$|\Omega| = 5^8.$$

Realizacja drugiego etapu

Niech A oznacza zdarzenie, że utworzymy ośmiocyfrową liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka.

<u>Sposób I</u>

Najpierw obliczymy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, przy czym cyfry wybieramy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Należy uwzględnić następujące warunki:

- liczba ma być parzysta, zatem cyfrę jedności wybieramy spośród $\{2, 4\}$,
- mają być dokładnie trzy cyfry 3, zatem miejsca dla nich wybieramy na $\binom{7}{3}$ sposobów (bo ostatnie miejsce jest już zajęte),
- pozostają cztery wolne miejsca, na które możemy wstawić po jednej cyfrze ze zbioru $\{1, 2, 4, 5\}$.

Korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy:

$$\underbrace{2}_{\text{wybór cyfry jedności}} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{wybór miejsc dla trzech 3}} \cdot \underbrace{4^4}_{\text{wybór pozostałych cyfr}} = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 256 = 17\,920$$

Następnie obliczymy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami i bez cyfry 5.

$$\underbrace{2}_{\text{wybór cyfry jedności}} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{wybór miejsc dla trzech 3}} \cdot \underbrace{3^4}_{\text{wybór pozostałych cyfr (bez 5 i 3)}} = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 81 = 5670$$

Wszystkich ośmiocyfrowych liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka, jest:

$|A| = 17\,920 - 5670 = 12\,250$.

<u>Sposób II</u>

Zbiór wyników sprzyjających zdarzeniu A można podzielić na zdarzenia wykluczające się, uwzględniając liczbę piątek w zapisie dziesiętnym liczby ośmiocyfrowej:

1. z dokładnie jedną cyfrą 5: $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4 \cdot 3^3 = 7560$
2. z dokładnie dwiema cyframi 5: $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3^2 = 3780$
3. z dokładnie trzema cyframi 5: $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot 3 = 840$
4. z dokładnie czterema cyframi 5: $2 \cdot \binom{7}{3} = 70$

Razem: $7560 + 3780 + 840 + 70 = 12\,250$.

Zatem $|A| = 12\,250$.

Realizacja trzeciego etapu

Jest to model klasyczny, więc:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12250}{5^8} = \frac{98}{5^5} = \frac{98}{3125}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Etap pierwszy to ustalenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego: $|\Omega| = 5^8$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Etap drugi to obliczenie, na ile sposobów w doświadczeniu losowym można otrzymać liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka.

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

2 punkty zdający otrzymuje wtedy, gdy:

- obliczy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, o cyfrach ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5}: 17 920

albo

- obliczy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami i bez cyfry 5: 5670

albo

- poprawnie rozważy **przynajmniej jeden** przypadek uwzględniający liczbę piątek w zapisie dziesiętnym liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, o cyfrach ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5}: z 1 piątką – 7560, z 2 piątkami – 3780, z 3 piątkami – 840, z 4 piątkami – 70.

3 punkty zdający otrzymuje wtedy, gdy obliczy liczbę wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 12\,250$.

Etap trzeci to obliczenie prawdopodobieństwa i zapisanie wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego: $P(A) = \frac{12250}{5^8} = \frac{98}{3125}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga
Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany również wtedy, gdy zdający popełni błąd rachunkowy w pierwszym lub drugim etapie i konsekwentnie obliczy $P(A)$, pod warunkiem, że otrzyma wartość z przedziału (0, 1).

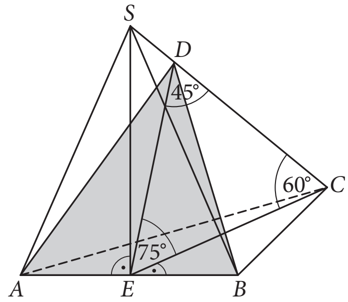
Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 12. (0–5)
W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równoramiennym o ramionach AC i BC długości 4 i kącie między nimi 30°. Punkt E – środek krawędzi AB – jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa, a krawędź boczna CS tworzy z podstawą kąt 60°. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź AB i mającą z przeciwległą krawędzią boczną CS wspólny punkt D (jak na rysunku). Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że tworzy on z podstawą ostrosłupa kąt 75°. Podaj dokładny wynik obliczeń.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający: P2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; P4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; R2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną; R7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku. Zauważmy, że w trójkącie *EDC* miara kata *EDC* jest równa 45°.



Obliczamy długość krawędzi *AB,* stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie *ABC.*

$$|AB|^2 = 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cdot \cos 30^\circ$$
$$|AB|^2 = 16(2-\sqrt{3})$$
$$|AB| = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *EBC* i wyznaczamy wysokość *EC.*

$$|EC|^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$$
$$|EC|^2 = 16 - 8 + 4\sqrt{3}$$
$$|EC|^2 = 4(2+\sqrt{3})$$
$$|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Odcinek *ED* jest wysokością przekroju *ABD*. Jego długość obliczymy, stosując twierdzenie sinusów w trójkącie *ECD.*

$$\frac{|ED|}{\sin 60^\circ} = \frac{|EC|}{\sin 45^\circ}$$
$$|ED| = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$|ED| = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}$$

Pole przekroju *ABD* jest zatem równe:

$$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6},$$
$$P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{4-3},$$
$$P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający obliczy miarę kąta *EDC* równą 45°.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy długość krawędzi $|AB| = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ albo wysokość podstawy ostrosłupa: $|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający

- obliczy długość krawędzi $|AB| = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ i wysokość podstawy ostrosłupa: $|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

albo

- obliczy wysokość podstawy ostrosłupa: $|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ i wysokość przekroju *ABD:* $|ED| = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 pkt**

Zdający obliczy długości odcinków: *AB* (krawędź podstawy ostrosłupa), *EC* (wysokość podstawy ostrosłupa) i *ED* (wysokość trójkąta *ABD*, będącego przekrojem ostrosłupa)

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający obliczy pole przekroju ostrosłupa: $P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup prawidłowy trójkątny albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów.**

2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy lub kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy, ale przy korzystaniu z własności figur, w których te kąty nie występują, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt.**

3. Jeżeli zdający odczyta przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty.**

Zadanie 13. (0–6)

Funkcja kwadratowa $f(x) = (2m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których odległość między miejscami zerowymi wynosi nie więcej niż 4.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną. R3. Równania i nierówności. Zdający: 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 8) rozwiązuje proste nierówności wymierne.

Przykładowe rozwiązania

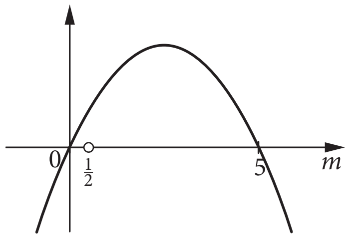
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. W pierwszym wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe. W drugim etapie wyznaczymy te wartości parametru m, dla których odległość między dwoma miejscami zerowymi funkcji jest równa co najwyżej 4. W trzecim etapie wyznaczymy wszystkie wartości parametru m spełniające warunki zadania.

Realizacja pierwszego etapu

Funkcja f jest trójmianem kwadratowym, gdy $2m-1\neq 0$, czyli $m\neq \frac{1}{2}$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe, gdy wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni.

$$4(m+1)^2-4(2m-1)(m-1)>0 \quad /:4$$
$$m^2+2m+1-2m^2+2m+m-1>0$$
$$-m^2+5m>0$$
$$-m(m-5)>0$$



Zatem dla $m\in(0,5)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ funkcja f jest trójmianem kwadratowym i ma dwa różne miejsca zerowe.

Realizacja drugiego etapu

Z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej wynika, że odległość między dwoma miejscami zerowymi funkcji jest równa wartości bezwzględnej ich różnicy. Należy zatem rozważyć warunek $|x_1-x_2|\leqslant 4$.

<u>Sposób I</u>

Korzystamy ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

$$\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|\leqslant 4$$
$$\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|\leqslant 4$$

Obie strony nierówności są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną:

$\frac{\Delta}{a^2}\leqslant 16,$

$\frac{4(-m^2+5m)}{(2m-1)^2}\leqslant 16$, gdzie $m\neq\frac{1}{2}$.

Wyrażenie $\frac{(2m-1)^2}{4}$ jest dodatnie, więc mnożąc obie strony ostatniej nierówności przez $\frac{(2m-1)^2}{4}$, otrzymujemy nierówność równoważną.

$$-m^2+5m\leqslant 4(2m-1)^2$$
$$4(4m^2-4m+1)+m^2-5m\geqslant 0$$
$$17m^2-21m+4\geqslant 0$$
$$m\in\left(-\infty,\frac{4}{17}\right\rangle\cup\langle 1,\infty)$$

<u>Sposób II</u>

Obie strony nierówności $|x_1-x_2|\leqslant 4$ są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujmy nierówność równoważną.

$$(x_1-x_2)^2\leqslant 16$$
$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leqslant 16$$

Stosujemy wzory Viète'a.

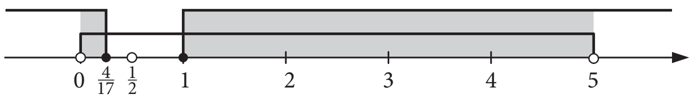
$$\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^2 - 4\cdot\frac{m-1}{2m-1} \leqslant 16, \quad \text{gdzie } m \neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{4(m^2+2m+1)}{(2m-1)^2} - \frac{4(m-1)(2m-1)}{(2m-1)^2} - \frac{16(2m-1)^2}{(2m-1)^2} \leqslant 0 \quad / \cdot \frac{(2m-1)^2}{4}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy nierówność.

$$17m^2 - 21m + 4 \geqslant 0$$
$$m \in \left(-\infty, \frac{4}{17}\right\rangle \cup \left\langle 1, \infty\right)$$

Realizacja trzeciego etapu
Wyznaczamy iloczyn zbiorów otrzymanych w etapach pierwszym i drugim.



Zatem odległość między miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f jest równa co najwyżej 4, gdy $m \in \left(0, \frac{4}{17}\right\rangle \cup \left\langle 1, 5\right)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Etap pierwszy to ustalenie, dla jakich wartości parametru m funkcja f jest trójmianem kwadratowym i ma dwa miejsca zerowe: $a \neq 0$ i $\Delta > 0$ dla $m \in (0, 5) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Uwaga
Jeżeli zdający nie rozważy warunku $a \neq 0$ lub zapisze $\Delta \geqslant 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Etap drugi to rozwiązanie nierówności $|x_1 - x_2| \leqslant 4$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci $\frac{\Delta}{a^2} \leqslant 16$ lub $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leqslant 16$.

2 punkty zdający otrzymuje za zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, np. w postaci $\frac{4(-m^2+5m)}{(2m-1)^2} \leqslant 16$ lub $\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^2 - 4\cdot\frac{m-1}{2m-1} \leqslant 16$.

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności: $m \in \left(-\infty, \frac{4}{17}\right\rangle \cup \left\langle 1, \infty\right)$.

Etap trzeci to wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków z etapów pierwszego i drugiego: $m \in \left(0, \frac{4}{17}\right\rangle \cup \left\langle 1, 5\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga
Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wtedy, gdy zdający poprawnie wykona przynajmniej jeden z etapów (pierwszy lub drugi), a ponadto w obu etapach otrzyma zbiory niepuste i różne od zbioru liczb rzeczywistych oraz konsekwentnie wyznaczy iloczyn tych zbiorów.

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **6 punktów.**

Zadanie 14. (0–6)
Wyznacz równania wszystkich wspólnych stycznych do paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$ i do okręgu o równaniu $x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2$.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	P7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu. R8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 4) oblicza odległość punktu od prostej; 5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. R11.3. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.

Przykładowe rozwiązania

Punkt $P=\left(p,\frac{1}{2}p^2\right)$ jest dowolnym punktem należącym do paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$. Zaczynamy od wyznaczenia równania stycznej do tej paraboli w punkcie P w zależności od wartości parametru $p\in R$. W tym celu obliczamy pochodną funkcji $f(x)=\frac{1}{2}x^2$:
$f'(x)=x$.
Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pierwszej pochodnej funkcji w punkcie styczności. Stąd $a=f'(p)=p$. Styczna do paraboli w punkcie P wyraża się zatem równaniem postaci:
$y-\frac{1}{2}p^2=p(x-p)$,
$y=px-\frac{1}{2}p^2$.
Następnie tak dobieramy wartość parametru p, aby prosta o równaniu $y=px-\frac{1}{2}p^2$ była styczna do okręgu o środku $S=\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ i promieniu $r=\sqrt{2}$.

<u>Sposób I</u>
Prosta jest styczna do okręgu wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.
Przekształcamy równanie prostej: $y=px-\frac{1}{2}p^2$ do postaci ogólnej:

$$px-y-\frac{1}{2}p^2=0 \quad /\cdot 2$$
$$2px-2y-p^2=0$$

i układamy równanie, stosując wzór na odległość punktu od prostej.

$$\frac{|5-p^2|}{\sqrt{(2p)^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}$$
$$|5-p^2|=\sqrt{8p^2+8}$$

Obie strony równania są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne.

$$25-10p^2+p^4=8p^2+8$$
$$p^4-18p^2+17=0$$

Podstawiamy $p^2=t$, gdzie $t\geqslant 0$, i otrzymujemy równanie: $t^2-18t+17=0$, które spełniają dwie liczby: $t_1=1, t_2=17$. Więc:
$p^2=1$ lub $p^2=17$,
$p\in\{-1,1,-\sqrt{17},\sqrt{17}\}$.

Parabola i okrąg mają zatem cztery wspólne styczne. Są to proste o równaniach:
$y=-x-\frac{1}{2}$, $y=x-\frac{1}{2}$, $y=-\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$, $y=\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$.

Sposób II

Prosta jest styczna do okręgu wtedy, gdy ma z nim dokładnie jeden punkt wspólny. Należy tak dobrać parametr p, by układ równań: $\begin{cases} y=px-\frac{1}{2}p^2 \\ x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2 \end{cases}$ miał dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$x^2+\left(px-\frac{1}{2}p^2+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

$$x^2+p^2x^2+\frac{1}{4}p^4+\frac{25}{4}-p^3x+5px-\frac{5}{2}p^2-2=0$$

$$(1+p^2)x^2+(5p-p^3)x+\frac{1}{4}p^4-\frac{5}{2}p^2+\frac{17}{4}=0$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (tzn. prosta ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem) wtedy, gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest równy zero.

$$\Delta=0$$

$$(5p-p^3)^2-4(1+p^2)\left(\frac{1}{4}p^4-\frac{5}{2}p^2+\frac{17}{4}\right)=0$$

$$25p^2-10p^4+p^6-(1+p^2)(p^4-10p^2+17)=0$$

Po wykonaniu mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie:
$p^4-18p^2+17=0$, które spełniają liczby: $p\in\{-1,1,-\sqrt{17},\sqrt{17}\}$.
Parabola i okrąg mają zatem cztery wspólne styczne. Są to proste o równaniach:
$y=-x-\frac{1}{2}$, $y=x-\frac{1}{2}$, $y=-\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$, $y=\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający zapisze współrzędne punktu leżącego na paraboli w zależności od jednej zmiennej, np. $P=\left(p,\frac{1}{2}p^2\right)$ oraz wyznaczy pochodną funkcji $f(x)=\frac{1}{2}x^2$: $f'(x)=x$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający wyznaczy funkcję pochodną: $f'(x)=x$ i poda współczynnik kierunkowy stycznej do paraboli w zależności od pierwszej współrzędnej punktu styczności, np. $a=f'(p)=p$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający wyznaczy równanie stycznej do paraboli w zależności od pierwszej współrzędnej punktu styczności: $y=px-\frac{1}{2}p^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą wynikające z warunku styczności prostej do okręgu, np. $\frac{|5-p^2|}{\sqrt{(2p)^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}$ lub $(5p-p^3)^2-4(1+p^2)\left(\frac{1}{4}p^4-\frac{5}{2}p^2+\frac{17}{4}\right)=0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 pkt**

Zdający poda rozwiązania równania: $p \in \{-1, 1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania), ale otrzyma cztery styczne.

Rozwiązanie pełne .... **6 pkt**

Zdający poda równania wspólnych stycznych paraboli i okręgu: $y = -x - \frac{1}{2}$, $y = x - \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{17}x - \frac{17}{2}$, $y = \sqrt{17}x - \frac{17}{2}$.

Zadanie 15. (0–7)

Prosta o równaniu: $y = a^2x + 3a$ przecina hiperbolę o równaniu: $y = \frac{4}{x}$ w dwóch punktach, A i B. Wyraź długość odcinka AB w zależności od wartości parametru $a < 0$. Wyznacz równanie prostej, która przecina opisaną hiperbolę tak, że długość odcinka AB jest najmniejsza.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. R3.3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych. P8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.

Przykładowe rozwiązanie

Wyznaczamy współrzędne punktów wspólnych prostej i hiperboli. W tym celu rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} y = a^2x + 3a \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}, \quad \text{gdzie } x \neq 0 \text{ i } a < 0$$

$$a^2x + 3a = \frac{4}{x}$$

$$a^2x^2 + 3ax - 4 = 0$$

$$\Delta = (3a) - 4 \cdot a^2 \cdot (-4) = 25a^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 5|a| = -5a, \quad \text{bo } a < 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a} \\ y_1 = 4a \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{4}{a} \\ y_2 = -a \end{cases}$$

Prosta i hiperbola mają zatem dwa punkty wspólne: $A = \left(\frac{1}{a}, 4a\right)$, $B = \left(-\frac{4}{a}, -a\right)$.
Obliczamy długość odcinka AB.

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{a}\right)^2 + (4a + a)^2}$$

$$|AB| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^2}}, \quad \text{gdzie } a \in (-\infty, 0)$$

Rozważmy funkcję pomocniczą określoną wzorem $f(a) = \frac{1 + a^4}{a^2}$, $D_f = (-\infty, 0)$.

Funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty)$ z czego wynika, że funkcje $|AB|$ i f mają takie same przedziały monotoniczności, a ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) przyjmują dla tych samych argumentów.

Wyznaczamy pochodną funkcji f.

$$f'(a) = \frac{4a^5 - 2a(1 + a^4)}{a^4}$$

$$f'(a) = \frac{2a^5 - 2a}{a^4}, \quad D_{f'} = D_f = (-\infty, 0)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej.

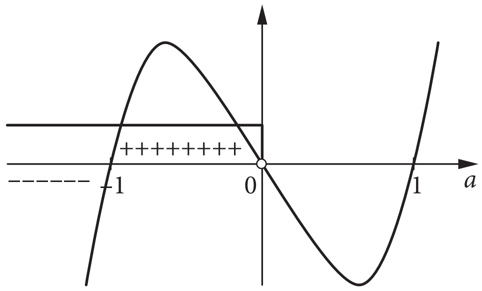
$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^5 - 2a = 0$$

$$2a(a-1)(a+1)(a^2+1) = 0$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1$$

$$a_1, a_2 \notin D_f$$

Badamy znak pochodnej w dziedzinie. Ponieważ mianownik pochodnej jest dodatni, wystarczy zbadać znak licznika.



$f'(a) < 0$ dla $a \in (-\infty, -1)$ oraz $f'(a) > 0$ dla $a \in (-1, 0)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -1, 0)$. Wynika stąd, że dla $a = -1$ funkcja f osiąga wartość najmniejszą, więc i długość odcinka AB jest najmniejsza, gdy $a = -1$.

Szukana prosta jest więc określona równaniem: $y = x - 3$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Etap pierwszy to:

a) zapisanie układu równań: $\begin{cases} y = a^2x + 3a \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$ oraz wyprowadzenie z niego równania z jedną niewiadomą i parametrem a, np. $a^2x + 3a = \frac{4}{x}$;

b) wyznaczenie współrzędnych punktów wspólnych prostej i hiperboli w zależności od wartości parametru $a < 0$, np. $A = \left(\frac{1}{a}, 4a\right)$, $B = \left(-\frac{4}{a}, -a\right)$;

c) zapisanie długości odcinka AB jako funkcji zmiennej a: $|AB| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^2}}$, gdzie $a \in (-\infty, 0)$.

Zdający otrzymuje po **1 punkt** za realizację każdej z części tego etapu.

Etap drugi to:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej $f(a) = \frac{1 + a^4}{a^2}$: $f'(a) = \frac{2a^5 - 2a}{a^4}$;

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1$;

c) uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $a = -1$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga
W uzasadnieniu przyjmowania wartości najmniejszej nie wystarcza stwierdzenie, że skoro pochodna zmienia znak „z $-$ na $+$”, to dla $a = -1$ funkcja f osiąga minimum. Uzasadnienie uznajemy za poprawne, jeżeli ze znaku pochodnej zdający określi przebieg funkcji **w dziedzinie** (np. poda przedziały monotoniczności, zbuduje tabelę przebiegu zmienności lub naszkicuje wykres) i stąd wywnioskuje fakt, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $a = -1$.

Etap trzeci to wyznaczenie równania prostej, która przecina hiperbolę o równaniu $y = \frac{4}{x}$ tak, że długość odcinka AB jest najmniejsza: $y = x - 3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi
1. Jeżeli zdający zapisze długość odcinka AB w zależności od zmiennej a, popełniając błąd rachunkowy, który nie ułatwia znacząco dalszych obliczeń, to może otrzymać co najwyżej **6 punktów**.

2. Jeżeli zdający zapisze długość odcinka AB w zależności od zmiennej a, popełniając błąd merytoryczny, i otrzyma zupełnie inną funkcję (np. wielomian), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (za etap I).