



**PRÓBNY
EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI**

**PRZED MATURĄ
MAJ 2016**

POZIOM ROZSZERZONY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–17).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

**Czas pracy:
180 minut**

**Liczba punktów
do uzyskania: 50**

Zadanie 1. (0–1)

Po usunięciu niewymierności z mianownika ułamka $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-2}$ otrzymamy:

- A. $\frac{-\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{32}-2}{4}$ B. $\frac{-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-2}{2}$ C. $\frac{\sqrt[3]{4}+2}{2}$ D. $\frac{-\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}{4}$

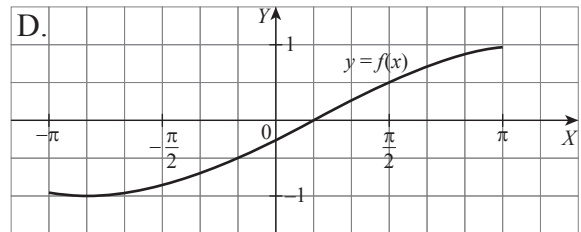
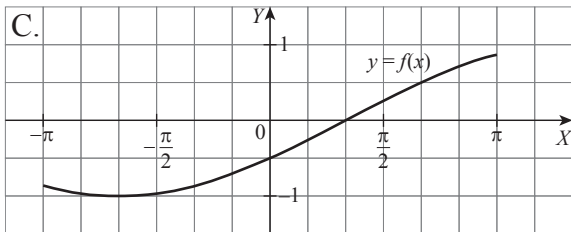
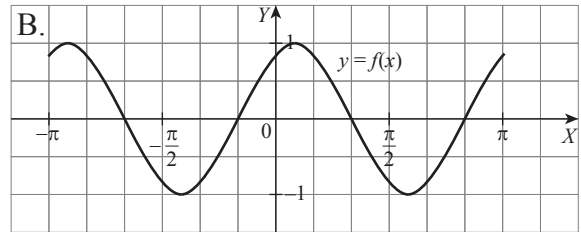
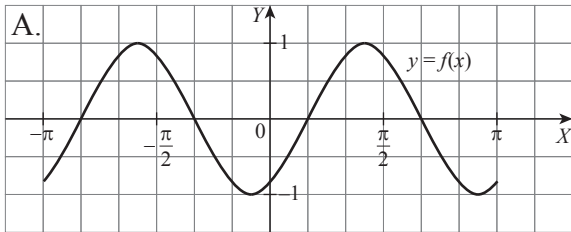
Zadanie 2. (0–1)

Liczba 234 jest największą liczbą spełniającą nierówność $|m-3x| \leq 14$, gdzie m jest parametrem. Zatem m jest liczbą podzielną przez:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Zadanie 3. (0–1)

Który z poniższych rysunków przedstawia wykres funkcji $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$?



Zadanie 4. (0–1)

Jedno z rozwiązań równania $2x^2 + 9x - 5 = 0$ jest pierwszym wyrazem, zaś drugie ilorazem pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. -10 B. $\frac{1}{12}$ C. $2\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{8}$

Zadanie 5. (0–1)

W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 6$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \frac{2}{3}\pi$. Promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy:

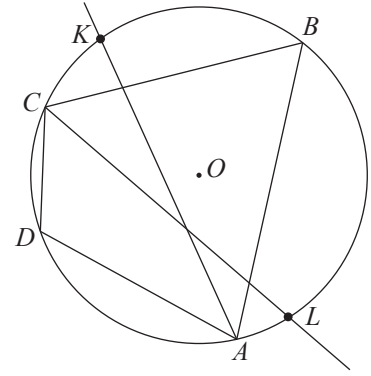
- A. $4\sqrt{2}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

BRUDNOPIS



Zadanie 8. (0–3)

Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg $o(O, r)$. Dwusieczna kąta BAD przecina okrąg w punkcie K , zaś dwusieczna kąta BCD przecina okrąg w punkcie L (zobacz rysunek obok). Wykaż, że punkty K, L, O są współliniowe.



A large grid area for writing the solution.

Zadanie 9. (0–3)

Napisz w postaci kierunkowej równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta ostrego wyznaczonego przez proste o równaniach $k: y = 0$ oraz $l: y = x$.



Odpowiedź

Zadanie 10. (0–3)

Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.



Zadanie 11. (0–3)

Podstawą ostrosłupa prostego $ABCS$ jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC , w którym przeciwprostokątna AC ma długość $2a$ ($a > 0$). Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość $3a$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź

Zadanie 12. (0–4)

Bok AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC . Środkowe AE i BF przecinają się pod kątem prostym. Oblicz $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = |\sphericalangle ACB|$.



Odpowiedź

Zadanie 13. (0–4)

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają warunek $\log_{y-1}(8x - x^2) = 2$.



Zadanie 14. (0–4)

Liczba naturalna jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy trzy ostatnie cyfry tej liczby (tj. cyfry: setek, dziesiątek i jedności) są zerami lub przedstawiają liczbę podzielną przez 8. Ile jest różnych liczb dziesięciocyfrowych podzielnych przez 8, w których zapisie cyfra 0 występuje pięć razy, cyfra 2 występuje cztery razy, a cyfra 4 – jeden raz?



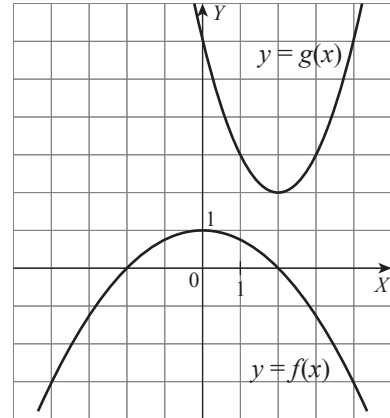
Odpowiedź

Zadanie 15. (0–5)

Na rysunku obok przedstawione są parabole będące wykresami dwóch funkcji:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \text{ oraz } g(x) = x^2 - 4x + 6.$$

Napisz równania wszystkich wspólnych stycznych do tych parabol.



A large grid area provided for the student to write their answer.

Odpowiedź

Zadanie 16. (0–5)

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + (m - 2)x^2 + (8 - m)x - 8$, gdzie parametr m jest liczbą całkowitą. Wyznacz wszystkie te wartości parametru, dla których dany wielomian ma trzy różne

pierwiastki x_1, x_2, x_3 spełniające warunek: $\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} > \frac{1}{2}$.



Odpowiedź

Zadanie 17. (0–7)

W kwadracie $ABCD$ o boku długości 2 zawiera się łuk okręgu o środku w punkcie A i promieniu AB . Rozważamy wszystkie odcinki spełniające jednocześnie dwa warunki:

- 1) Odcinek jest styczny do danego łuku w dowolnie wybranym na tym łuku punkcie E ($E \neq B$ i $E \neq D$).
- 2) Jeden koniec odcinka należy do boku BC , zaś drugi do boku DC .

Wykaż, że najkrótszy odcinek spełniający warunki zadania ma długość $4(\sqrt{2} - 1)$.

