# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
## ODPOWIEDZI DO ARKUSZA ROZSZERZONEGO

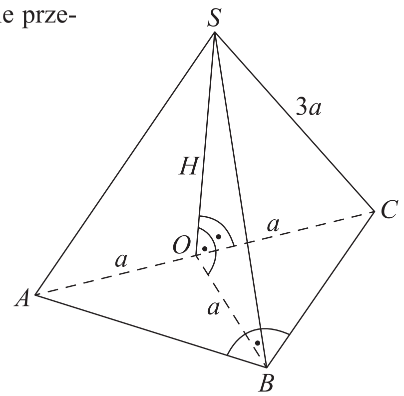
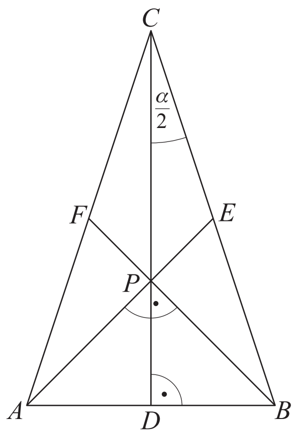
### ZADANIA ZAMKNIĘTE

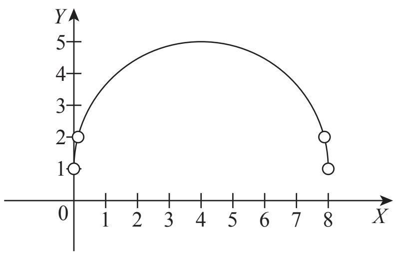
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| B | B | A | A | D |

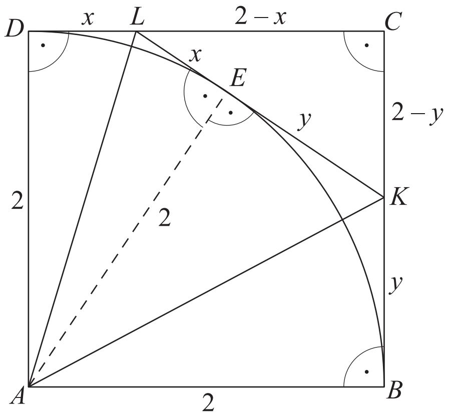
### ZADANIA OTWARTE

6. 225
7. 300

| Numer zadania | Etapy rozwiązania | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 8 | Przykładowe rozwiązanie<br>Niech $\lvert\sphericalangle BAD\rvert = \alpha$. Wówczas $\lvert\sphericalangle BCD\rvert = 180^\circ - \alpha$ na podstawie warunku opisywalności okręgu na czworokącie. Z założenia $AK^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta $BAD$, zaś $CL^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta $BCD$, więc $\lvert\sphericalangle LCB\rvert = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ oraz $\lvert\sphericalangle BAK\rvert = \frac{\alpha}{2}$. Kąty $BAK$ i $BCK$ to kąty wpisane oparte na tym samym łuku, więc $\lvert\sphericalangle BCK\rvert = \frac{\alpha}{2}$. Obliczamy miarę kąta wpisanego $KCL$:<br>$\lvert\sphericalangle KCL\rvert = \lvert\sphericalangle BCK\rvert + \lvert\sphericalangle LCB\rvert = \frac{\alpha}{2} + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ.$<br>Ponieważ kąt $KCL$ jest prosty, więc odcinek $LK$ jest średnicą okręgu, czyli punkty $L$, $K$, $O$ są współliniowe. | 3 |
| 9 | I sposób<br>Skorzystanie z własności dwusiecznej kąta do ułożenia równania<br>$\lvert y_0\rvert = \frac{\lvert x_0 - y_0\rvert}{\sqrt{2}}$, gdzie $M(x_0, y_0)$ – punkt należący do dwusiecznej kąta. | 1 |
| | Zapisanie równań prostych zawierających dwusieczne kątów utworzonych przez proste $k$ i $l$: $x - \left(1 + \sqrt{2}\right)y = 0$ oraz $x - \left(1 - \sqrt{2}\right)y = 0$. | 1 |
| | Podanie równania prostej, w postaci kierunkowej, zawierającej dwusieczną kąta ostrego: $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$. | 1 |
| | II sposób<br>Zapisanie równania $\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 1$, gdzie $\frac{\alpha}{2}$ – miara kąta nachylenia prostej zawierającej dwusieczną kąta (utworzonego przez proste $k$ i $l$) do osi $OX$. | 1 |
| | Rozwiązanie równania trygonometrycznego:<br>$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 - \sqrt{2}$ lub $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$. | 1 |
| | Podanie równania prostej, w postaci kierunkowej, zawierającej dwusieczną kąta ostrego: $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | <u>Przykładowe rozwiązanie</u><br>Przekształcamy tezę równoważnie. Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie (z założenia $x > 0$ i $y > 0$), więc po podniesieniu tych stron do potęgi szóstej otrzymamy nierówność równoważną danej. Mamy:<br>$\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt[3]{x^3 + y^3} \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^3 > \left(x^3 + y^3\right)^2 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 > x^6 + 2x^3y^3 + y^6 \Leftrightarrow 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 2x^3y^3 > 0 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow x^2y^2 \cdot (3x^2 + 3y^2 - 2xy) > 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot [(x-y)^2 + 2 \cdot (x^2 + y^2)] > 0$<br>Ostatnia nierówność jest prawdziwa, zatem nierówność wyjściowa jest także prawdziwa, co kończy dowód. | 3 |
| 11 | Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w połowie przeciwprostokątnej.<br>$\lvert OA\rvert = \lvert OB\rvert = \lvert OC\rvert = a$<br>$\lvert AS\rvert = \lvert BS\rvert = \lvert CS\rvert = 3a,\ a > 0$<br> | |
| | Obliczenie pola $P$ podstawy: $P = a^2$. | 1 |
| | Obliczenie wysokości $H$ ostrosłupa: $H = 2\sqrt{2}a$. | 1 |
| | Obliczenie objętości $V$ ostrosłupa: $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. | 1 |
| 12 | Niech $\lvert AB\rvert = a,\ a > 0$,<br>$CD$ – wysokość na podstawę $AB$ (środkowa),<br>$\lvert\sphericalangle DCB\rvert = \frac{\alpha}{2},\ \alpha \in (0°, 180°)$,<br>$\lvert\sphericalangle APB\rvert = 90°$ oraz $\lvert AP\rvert = \lvert PB\rvert$,<br>wówczas $\lvert DP\rvert = \lvert DB\rvert = \frac{a}{2}$.<br><br><u>I sposób</u><br>Obliczenie długości odcinka $CD$ (z własności środkowych)<br>$\lvert CD\rvert = 3 \cdot \lvert DP\rvert = \frac{3a}{2}$.<br> | 1 |
| | Obliczenie długości odcinka $BC$ (twierdzenie Pitagorasa dla $\Delta DBC$);<br>$\lvert BC\rvert = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. | 1 |
| | Obliczenie $\sin\frac{\alpha}{2}$ $\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ w trójkącie $DBC$: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$<br>$\left(\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$. | 1 |
| | Obliczenie $\cos\alpha$ (ze wzoru $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ lub $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$);<br>$\cos\alpha = 0{,}8$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | II sposób<br>Obliczenie długości odcinka $CD$ (z własności środkowych);<br>$\lvert CD\rvert = 3 \cdot \lvert DP\rvert = \frac{3a}{2}$. | 1 |
| | Obliczenie długości odcinka $BC$ (twierdzenie Pitagorasa dla $\Delta DBC$);<br>$\lvert BC\rvert = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. | 1 |
| | Obliczenie długości odcinka $FB$ (z własności środkowych);<br>$\lvert FB\rvert = \frac{3}{2}\lvert PB\rvert = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$. | 1 |
| | Obliczenie $\cos\alpha$ (twierdzenie cosinusów dla $\Delta FBC$); $\cos\alpha = 0{,}8$. | 1 |
| 13 | Zapisanie założeń i rozwiązanie otrzymanych nierówności:<br>$y - 1 > 0 \;\wedge\; y - 1 \neq 1 \;\wedge\; 8x - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; y \in (1, 2) \cup (2, +\infty) \;\wedge\; x \in (0, 8)$. | 1 |
| | Skorzystanie z definicji logarytmu i zapisanie równania: $(y - 1)^2 = 8x - x^2$. | 1 |
| | Ustalenie współrzędnych środka i promienia okręgu: $S(4, 1)$, $r = 4$. | 1 |
| | Przedstawienie zbioru punktów płaszczyzny spełniających warunki zadania z uwzględnieniem założeń.<br><br> | 1 |
| 14 | Obliczenie, ile jest liczb z cyfrą 2 na początku:<br>2 _ _ _ _ _ _ 000 – (60 liczb)<br>2 _ _ _ _ _ _ 200 – (60 liczb)<br>2 _ _ _ _ _ _ 400 – (20 liczb)<br>2 _ _ _ _ _ _ 040 – (20 liczb)<br>2 _ _ _ _ _ _ 240 – (15 liczb)<br>2 _ _ _ _ _ _ 024 – (15 liczb)<br>Tych liczb jest 190. | 3<br>(po 1 pkt za parę) |
| | Obliczenie, ile jest liczb z cyfrą 4 na początku:<br>4 _ _ _ _ _ _ 000 – (15 liczb)<br>4 _ _ _ _ _ _ 200 – (20 liczb)<br>Tych liczb jest 35.<br>Zatem liczb spełniających warunki zadania jest 225. | 1 |
| 15 | Napisanie równania stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$, poprowadzonej w punkcie $M_1\left(x_1, -\frac{1}{4}x_1^2 + 1\right)$:<br>$y = -\frac{1}{2}x_1 \cdot (x - x_1) - \frac{1}{4}x_1^2 + 1$, czyli $y = -\frac{1}{2}x_1 \cdot x + \frac{1}{4}x_1^2 + 1$. | 1 |
| | Napisanie równania stycznej do wykresu funkcji $g(x) = x^2 - 4x + 6$ poprowadzonej w punkcie $M_2(x_2, x_2^2 - 4x_2 + 6)$:<br>$y = (2x_2 - 4) \cdot (x - x_2) + x_2^2 - 4x_2 + 6$, czyli $y = (2x_2 - 4) \cdot x - x_2^2 + 6$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 = 2x_2 - 4 \\ \frac{1}{4}x_1^2 + 1 = -x_2^2 + 6 \end{cases}$.<br>Rozwiązaniami są dwie pary liczb: $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x_2 = 2\frac{1}{5} \\ x_1 = -\frac{4}{5} \end{cases}$. | 2 |
| | Podanie odpowiedzi: są dwie wspólne styczne o równaniach:<br>$y = -2x + 5$ oraz $y = \frac{2}{5}x + 1\frac{4}{25}$. | 1 |
| 16 | Zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = (x - 1)(2x^2 + mx + 8)$.<br><u>I sposób</u> (metoda grupowania wyrazów)<br>$W(x) = 2x^3 + (m - 2)x^2 + (8 - m)x - 8 = 2x^3 + mx^2 - 2x^2 + 8x - mx - 8 =$<br>$= (2x^3 - 2x^2) + (mx^2 - mx) + 8x - 8 = 2x^2(x - 1) + mx(x - 1) + 8(x - 1) =$<br>$= (x - 1)(2x^2 + mx + 8)$.<br><u>II sposób</u> (zastosowanie twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych)<br>Zauważamy, że $W(1) = 0$. Dzielimy wielomian $W(x)$ przez dwumian $(x - 1)$, skąd otrzymujemy iloraz $2x^2 + mx + 8$. Zatem $W(x) = (x - 1)(2x^2 + mx + 8)$. | 1 |
| | Niech $Q(x) = 2x^2 + mx + 8$. Zapisanie założeń na istnienie dwóch różnych pierwiastków wielomianu $Q(x)$, z których każdy jest różny od 1, i rozwiązanie otrzymanych nierówności:<br>$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -8) \cup (8, +\infty)$<br>$Q(1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -10$ | 2 |
| | Zapisanie nierówności $\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} > 1$ w postaci $\frac{4}{1 - \frac{m}{2}} > \frac{1}{2}$, gdzie $m \neq 2$,<br>$x_1 = 1$, $x_2 \cdot x_3 = 4$ i $x_2 + x_3 = -\frac{m}{2}$ oraz podanie jej zbioru rozwiązań:<br>$m \in (-14, 2)$. | 1 |
| | Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności i uwzględnienie założenia, że $m \in \boldsymbol{C}$;<br>$m \in (-14, -10) \cup (-10, -8) \wedge m \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow m \in \{-13, -12, -11, -9\}$. | 1 |
| 17 | Niech $KL$ będzie jednym z odcinków spełniających warunki zadania.<br>Wprowadzamy oznaczenia:<br>$\lvert DL\rvert = x$, $\lvert LC\rvert = 2 - x$, $x \in (0, 2)$,<br>$\lvert BK\rvert = y$, $\lvert KC\rvert = 2 - y$, $y \in (0, 2)$.<br>$E$ – punkt styczności odcinka $LK$ i łuku okręgu<br> | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Skorzystanie z twierdzenia o odcinkach stycznych:<br>$(\|DL\| = \|LE\| = x$ oraz $\|EK\| = \|KB\| = y)$, i zapisanie długości odcinka $KL$:<br>$\|KL\| = x + y$, gdzie $x \in (0, 2)$ i $y \in (0, 2)$. | 1 |
| | Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $LKC$ i wyznaczenie długości odcinka $LK$ w zależności od $x$:<br>$\|LK\| = f(x) = x + \frac{4 - 2x}{x + 2} = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$, $x \in (0, 2)$. | 1 |
| | Obliczenie pochodnej funkcji $f$: $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 4}{(x + 2)^2}$, $x \in (0, 2)$. | 1 |
| | Obliczenie miejsca zerowego pochodnej:<br>$[f'(x) = 0 \wedge x \in (0, 2)] \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} - 2$. | 1 |
| | Określenie znaku pochodnej i ustalenie extremum funkcji f:<br>$[f'(x) < 0 \wedge x \in (0, 2)] \Leftrightarrow x \in (0, 2\sqrt{2} - 2)$<br>$[f'(x) > 0 \wedge x \in (0, 2)] \Leftrightarrow x \in (2\sqrt{2} - 2, 2)$<br>Jeśli $x = 2\sqrt{2} - 2$, to funkcja $f$ przyjmuje minimum lokalne. | 1 |
| | Uzasadnienie, że minimum lokalne funkcji $f$ jest jej najmniejszą wartością. | 1 |
| | Obliczenie długości najkrótszego odcinka spełniającego warunki zadania:<br>$\|KL\| = 4(\sqrt{2} - 1)$. | 1 |