PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

PRZED MATURĄ
MAJ 2017

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron (zadania 1–18).
2. Rozwiązania zadań wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Czas pracy:
180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

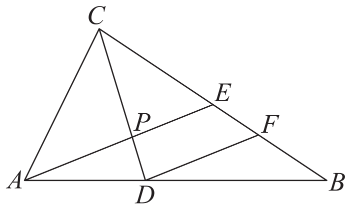
Zadanie 1. (0–1)

Suma pięćdziesięciu kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 5, jest równa 9525. Najmniejsza z tych liczb naturalnych jest równa:

A. 26 B. 19 C. 12 D. 5.

Zadanie 2. (0–1)

W trójkącie ABC – zobacz rysunek obok – punkt D tak dzieli bok AB, że $|AD| : |DB| = 2 : 3$. Odcinek CD przecina środkową AE trójkąta ABC w punkcie P, odcinek DF jest równoległy do środkowej AE. Zatem:



A. $|PD| : |CP| = 2 : 3$ B. $|PD| : |CP| = 2 : 5$

C. $|PD| : |CP| = 3 : 5$ D. $|PD| : |CP| = 1 : 3$.

Zadanie 3. (0–1)

Ile jest siedmiowyrazowych ciągów rosnących o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$?

A. 20^7 B. $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 14$ C. $\binom{20}{7}$ D. $20 \cdot 7!$

Zadanie 4. (0–1)

Boki równoległoboku mają długość 8 i 5, a kąt ostry równoległoboku jest równy 60°. Objętość bryły, powstałej w wyniku obrotu tego równoległoboku wokół krótszego boku, jest równa:

A. 240π B. 960π C. $200\sqrt{3}\pi$ D. $100\sqrt{3}\pi$.

Zadanie 5. (0-1)

Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji $f(x) = \log_2(4 - x)$ z prostą k: $x + y = 0$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

BRUDNOPIS

Zadanie 6. (0–2)

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 15x - 1$ ma dwa miejsca zerowe. Oblicz sumę sześcianów tych miejsc zerowych. Zakoduj wynik, wpisując w kratki cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanej liczby.

Zadanie 7. (0–2)

W tabeli poniżej znajdują się liczby dziewcząt i chłopców uczęszczających do klas Ia i Ib.

Klasa	Ia	Ib
Liczba dziewcząt	10	5
Liczba chłopców	20	25

Rzucamy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko lub sześć oczek, to wybieramy losowo dwie osoby z klasy Ia; w przeciwnym przypadku wybieramy losowo dwie osoby z klasy Ib. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – została wybrana para dziewczyna i chłopiec. Zakoduj wynik, zapisując cyfrę części dziesiętnych, setnych i tysięcznych.

Zadanie 8. (0–2)

Nieskończony ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{3n - 7}{5 + 2n}$ ma granicę g. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $|a_n - g| < \frac{1}{100}$.

Odpowiedź ....

Zadanie 9. (0–2)

Rozpatrujemy nieskończony, malejący ciąg geometryczny obwodów kół: $L_1, L_2, L_3, \ldots$ Wiadomo, że suma obwodów wszystkich kół jest 5 razy większa od sumy obwodów wszystkich kół o numerach parzystych. Wyznacz iloraz tego ciągu.

Odpowiedź ....

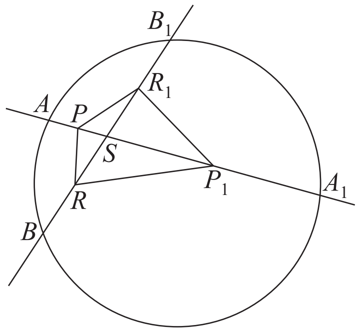
Zadanie 10. (0–3)

Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie i różne od 1 oraz $a^2 + b^2 = 23ab$, to

$$2\log_c \frac{a+b}{5} = \frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}.$$

Zadanie 11. (0–3)

Przez punkt S poprowadzono dwie proste, które przecięły okrąg o w punktach A, A_1 oraz B, B_1 jak na rysunku obok. Punkty P, P_1, R, R_1 oznaczają odpowiednio środki odcinków SA, SA_1, SB, SB_1. Wykaż, że na czworokącie PRP_1R_1 można opisać okrąg.



Zadanie 12. (0–3)

Dane są dwa współśrodkowe okręgi. W mniejszym okręgu (o promieniu r) zaznaczono średnicę AB, na większym okręgu (o promieniu R) wybrano punkt P. Wykaż, że suma $|PA|^2 + |PB|^2$ jest stała (tzn. nie zależy od wyboru punktu P na większym okręgu). Rozważ dwa przypadki.

Zadanie 13. (0–4)

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$, gdzie $x \neq \frac{\pi \cdot k}{2}$, $k \in \boldsymbol{C}$.

Odpowiedź ....

Zadanie 14. (0–4)

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 9x + 14$, którego współczynniki a, b są liczbami całkowitymi. Wiedząc, że dwa różne pierwiastki tego wielomianu są liczbami pierwszymi, oblicz:

a) współczynniki a, b;

b) resztę z dzielenia wielomianu $P(x) = [W(x) - 20x]^5 + 40x^{2017}$ przez dwumian $(x - 1)$.

Odpowiedź ....

Zadanie 15. (0–5)

Ze zbioru $X = \{x: x \in \boldsymbol{C} \text{ i } |x-1| \leq 4\}$ losujemy dwa razy (ze zwracaniem) po jednej liczbie. Oznaczmy te liczby w kolejności losowania a oraz b. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że para liczb (a, b) jest rozwiązaniem nierówności $y - x + 2 > 0$, jeżeli wiadomo, że liczba b jest nieujemna.

Odpowiedź ....

Zadanie 16. (0–5)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej m prosta opisana równaniem $mx - y + 5 - 4m = 0$ przecina okrąg o: $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ w dwóch punktach, których suma odciętych jest równa 8.

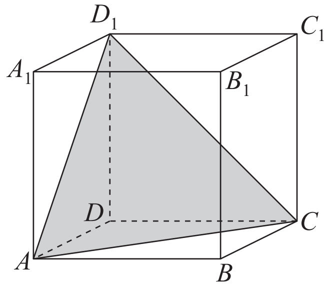
Zadanie 17. (0–6)

Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi OY, których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = \frac{-2}{x}$, $x < 0$, a drugi koniec leży na wykresie funkcji $g(x) = -(x-2)^2$, $x \in \mathbf{R}$. Oblicz długość najkrótszego takiego odcinka.

Odpowiedź ....

Zadanie 18. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o krawędzi mającej długość a. Oblicz odległość punktu B od płaszczyzny ACD_1.



Odpowiedź ....