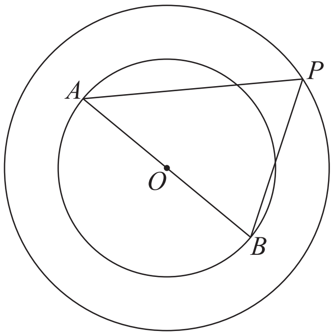
PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
ODPOWIEDZI DO ARKUSZA ROZSZERZONEGO

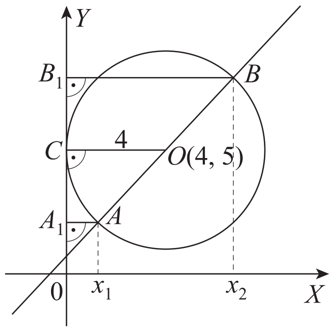
ZADANIA ZAMKNIĘTE

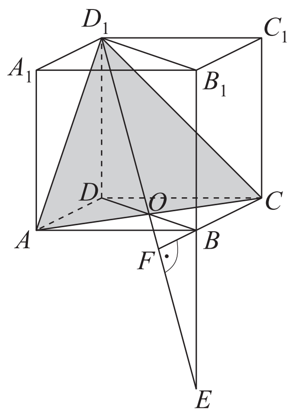
1	2	3	4	5
B	**B**	**C**	**A**	**C**

ZADANIA OTWARTE

Numer zadania	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
6.	Zapisanie sumy $x_1^3 + x_2^3$ w postaci $(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$, gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji f, obliczenie wartości wyrażenia: 3420 i zakodowanie wyniku: $\boxed{4\,2\,0}$.	2
7.	Obliczenie $P(A)$ ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite: $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 20}{30 \cdot 29} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 25}{30 \cdot 29} = \frac{10}{29} = 0{,}34482...$ i zakodowanie wyniku: $\boxed{3\,4\,4}$.	2
8.	Wyznaczenie granicy g ciągu (a_n): $g = \frac{3}{2}$.	1
	Rozwiązanie nierówności: $\left\lvert \frac{3n-7}{5+2n} - \frac{3}{2} \right\rvert < \frac{1}{100}$: $n > 722{,}5$ i zapisanie odpowiedzi: 723.	1
9.	Zapisanie sumy obwodów wszystkich kół: $\frac{L_1}{1-q}$ i sumy obwodów wszystkich kół o numerach parzystych: $\frac{L_1 q}{1-q^2}$, gdzie q jest ilorazem ciągu geometrycznego $L_1, L_2, L_3, ...$	1
	Ułożenie i rozwiązanie równania: $\frac{L_1}{1-q} = 5 \cdot \frac{L_1 q}{1-q^2}$: $q = \frac{1}{4}$.	1
10.	<u>Sposób I</u> Zapisanie, że wystarczy wykazać, że $2\log_c \frac{a+b}{5} - \frac{1}{\log_a c} - \frac{1}{\log_b c} = 0$ i zapisanie lewej strony równości w postaci: $2\log_c \frac{a+b}{5} - \log_c a - \log_c b$.	1
	Doprowadzenie lewej strony do postaci: $\log_c \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{25ab}$.	1
	Wykorzystanie założenia i pokazanie, że lewa strona jest równa 0.	1
	<u>Sposób II</u> Zapisanie założenia $a^2 + b^2 = 23ab$ w postaci $(a+b)^2 = 25ab$ i wywnioskowanie z tego, że $a + b = 5\sqrt{ab}$, bo $a > 0$ i $b > 0$.	1
	Zapisanie: $2\log_c \frac{a+b}{5} = 2\log_c \frac{5\sqrt{ab}}{5} = \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}$.	2

11.	Zauważenie, że czworokąt ABA_1B_1 jest wpisany w okrąg, więc wystarczy pokazać, że kąty czworokąta PRP_1R_1 są odpowiednio równe kątom czworokąta ABA_1B_1.	1
	Wykazanie, że np.: $\lvert\sphericalangle BAB_1\rvert = \lvert\sphericalangle RPR_1\rvert$ (i analogicznie, że $\lvert\sphericalangle B_1A_1B\rvert = \lvert\sphericalangle R_1P_1R\rvert$) – powołanie się na twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta i twierdzenie o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.	2
12.	Niech O oznacza wspólny środek okręgów. Przypadek 1. Punkty A, B, P nie są współliniowe.  Oznaczmy $\lvert\sphericalangle POA\rvert = \alpha$, wtedy $\lvert\sphericalangle BOP\rvert = 180° - \alpha$; ponadto $\lvert AO\rvert = \lvert BO\rvert = r$, $\lvert OP\rvert = R$. Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkątów AOP i POB: $\lvert PA\rvert^2 = r^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos\alpha$ $\lvert PB\rvert^2 = r^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos(180° - \alpha) = r^2 + R^2 + 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos\alpha$, zatem $\lvert PA\rvert^2 + \lvert PB\rvert^2 = 2(r^2 + R^2)$.	2
	Przypadek 2. Punkty A, B, P są współliniowe. $\lvert PA\rvert^2 + \lvert PB\rvert^2 = (R - r)^2 + (R + r)^2 = 2(r^2 + R^2)$.	1
13.	Doprowadzenie wyrażenia $\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$ do postaci $1 + \frac{2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.	1
	Doprowadzenie wyrażenia $1 + \frac{2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ do postaci $1 + \frac{8}{\sin^2 2x}$.	1
	Oszacowanie wraz z uzasadnieniem $1 + \frac{8}{\sin^2 2x} \geq 1 + 8 = 9$ i zapisanie odpowiedzi. Najmniejsza wartość funkcji f jest równa 9.	2
14.	Ustalenie, że pierwiastkami wielomianu, będącymi liczbami pierwszymi, mogą być tylko liczby 2 i 7.	1
	Ułożenie układu równań $\begin{cases} W(2) = 0 \\ W(7) = 0 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a = -18 \\ b = 29 \end{cases}$	1
	Wyznaczenie reszty z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $(x - 1)$: 8.	1
15.	Wyznaczenie elementów zbioru X: $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.	1
	Wyznaczenie mocy przestrzeni zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 81$.	1
	Wyznaczenie mocy zdarzeń: B oraz $A \cap B$, gdzie A oznacza zdarzenie: para liczb (a, b) jest rozwiązaniem nierówności $y - x + 2 > 0$, B – liczba b jest nieujemna; $\lvert B\rvert = 54$, $\lvert A \cap B\rvert = 44$.	2
	Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A \mid B)$: $\frac{22}{27}$.	1

16.	Sposób I  Naszkicowanie w układzie współrzędnych okręgu i zauważenie, że dla dowolnej liczby m prosta przechodzi przez środek okręgu, a zatem prosta przecina okrąg w dwóch punktach.	3
	Zauważenie, że czworokąt ABB_1A_1 (rysunek powyżej) jest trapezem, a odcinek CO jest odcinkiem łączącym środki ramion trapezu, więc: $x_1 + x_2 = \|AA_1\| + \|BB_1\| = 2\|OC\| = 2 \cdot 4 = 8$. Równość zachodzi również wtedy, gdy punkty A_1, B_1 pokrywają się.	2
	Sposób II Utworzenie układu równań $\begin{cases} mx - y + 5 - 4m = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$ i doprowadzenie do równania kwadratowego z parametrem m: $(m^2 + 1)x^2 - 8(m^2 + 1)x + 16m^2 = 0$ (*).	3
	Wyznaczenie Δ, $\Delta = 64(m^2 + 1)$ i stwierdzenie, że Δ jest dodatnia dla dowolnej wartości m, więc układ równań ma zawsze dwa rozwiązania.	1
	Wyznaczenie sumy rozwiązań równania (*): $x_1 + x_2 = 8$.	1
17.	Wyznaczenie funkcji wyznaczającej długość odcinków opisanych w zadaniu $h(x) = \frac{-2}{x} + x^2 - 4x + 4$, $x < 0$.	2
	Wyznaczenie pochodnej funkcji h: $h'(x) = \frac{2}{x^2} + 2x - 4$, $x < 0$.	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $h'(x) = 0 \iff x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.	1
	Uzasadnienie, że w punkcie $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ funkcja h przyjmuje najmniejszą wartość, np. wyznaczając przedziały monotoniczności funkcji h.	1
	Obliczenie najmniejszej wartości funkcji h: $\frac{9 + 5\sqrt{5}}{2}$.	1
18.	Sposób I Zauważenie, że odległość punktu B od płaszczyzny ACD_1 jest równa wysokości ostrosłupa ACD_1B.	1
	Obliczenie objętości ostrosłupa ACD_1B (patrząc na niego w taki sposób, że podstawą jest trójkąt ABC, a wtedy wysokością jest D_1D): $\frac{a^3}{6}$.	1
	Zapisanie objętości ostrosłupa ACD_1B (patrząc na niego w taki sposób, że podstawą jest trójkąt ACD_1, a wtedy wysokością h jest odległość punktu B od płaszczyzny ACD_1). Wyznaczenie h: $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.	2

	<u>Sposób II</u>  Wykazanie, że płaszczyzna DBB_1D_1 jest prostopadła do płaszczyzny ACD_1.	1
	Stwierdzenie, że prosta przechodząca przez punkt B prostopadła do krawędzi przecięcia płaszczyzn ACD_1 i DBB_1D_1 jest prostopadła do płaszczyzny ACD_1.	1
	Wykazanie, że trójkąt BFE jest podobny np. do trójkąta D_1EB_1, zapisanie proporcji $\frac{\lvert BF\rvert}{\lvert D_1B_1\rvert}=\frac{\lvert BE\rvert}{\lvert D_1E\rvert}$.	1
	Wyznaczenie długości odcinków: $\lvert D_1B_1\rvert=\sqrt{2}a$, $\lvert D_1E\rvert=\sqrt{6}a$, $\lvert BE\rvert=a$ Wyznaczenie $\lvert BF\rvert$: $\lvert BF\rvert=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.	1