# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
## ODPOWIEDZI DO ARKUSZA PODSTAWOWEGO

### Odpowiedzi do zadań testowych

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **D** | **B** | **B** | **B** | **A** | **D** | **C** | **C** | **B** | **B** | **C** | **D** | **B** | **B** | **C** |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | | | | | | | |
| **B** | **A** | **D** | **D** | **C** | **A** | **C** | **B** | | | | | | | |

### Propozycje rozwiązań zadań otwartych:

**Zadanie 24.** $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

*Rozwiązanie:*

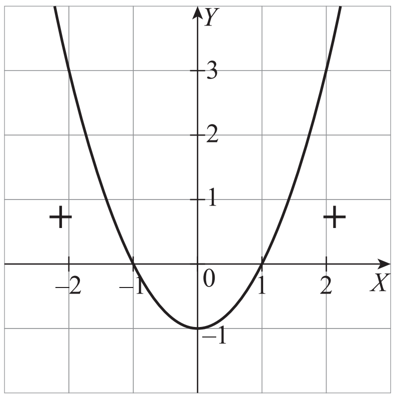
$(x - 3)^2 > x - 3$

$x^2 - 6x + 9 > x - 3$

$x^2 - 7x + 12 > 0$

$x_1 = 3$ lub $x_2 = 4$

$x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.




Punktacja:

Przekształcenie nierówności i poprawne wyznaczenie dwóch pierwiastków: 1 punkt

Poprawne zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej: 1 punkt

**Zadanie 25.**

*Rozwiązanie:*

Prosta $k$ jest równoległa do prostej $y = 2x + 2$, zatem ma ten sam współczynnik kierunkowy. Przecina się z osią $Oy$ w punkcie $A$, więc $k$: $y = 2x - 1$.

Prosta $l$ przechodzi przez punkty $A$ i $B$, więc jej równanie to $l$: $y = -x - 1$.

Szukane układy równań:

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

Punktacja:

Poprawny układ równań do podpunktu a: 1 punkt.

Poprawny układ równań do podpunktu b: 1 punkt.

**Zadanie 26.** Siódmy wyraz, czyli $a_7$

*Rozwiązanie:*

$a_n = 11$

$-2n^2 + 17n - 10 = 11$

$-2n^2 + 17n - 21 = 0$

$n_1 = \frac{3}{2}$ lub $n_2 = 7$. Ponieważ $n \in \boldsymbol{N}_+$, więc $n = 7$. Wobec tego $a_7 = 11$

Punktacja:

Zapisanie warunku $a_n = 11$ i przekształcenie do postaci $-2n^2 + 17n - 21 = 0$ i znalezienie pierwiastków równania: 1 punkt

Wybór rozwiązania spełniającego warunki zadania (odrzucenie wartości niecałkowitej): 1 punkt

**Zadanie 27.** 9

*Rozwiązanie:*

$f(x) = -x^2 + 4x - 1$

$p = x_w = \frac{-b}{2a} = 2$

Ponieważ $2 \in \langle 0, 5\rangle$, więc $f(2) = 3$. Ponadto $f(0) = -1$ i $f(5) = -6$. Wobec tego wartość największa jest równa 3, a wartość najmniejsza jest równa –6. Zatem różnica wartości największej i najmniejszej przyjmuje wartość 9.

Punktacja:

Wyznaczenie wartości $f(2)$, $f(0)$ i $f(5)$: 1 punkt

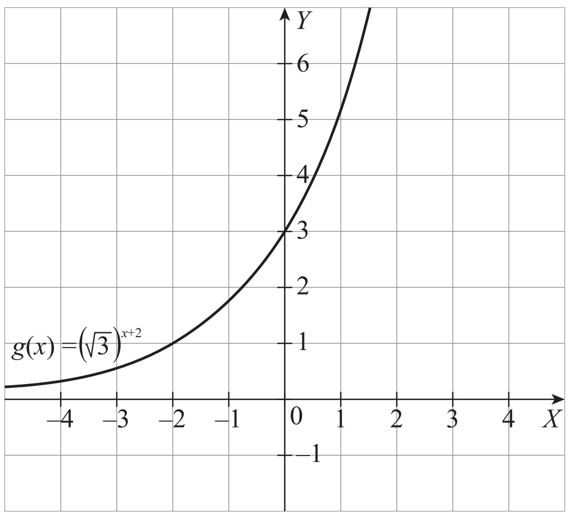
Obliczenie różnicy wartości największej i najmniejszej: 1 punkt.

**Zadanie 28.**

*Rozwiązanie:*

Punkt $A$ należy do wykresu funkcji wykładniczej, gdy $a^{-2} = \frac{1}{3}$. Rozwiązaniem równania są liczby $a = \sqrt{3}$ oraz $a = -\sqrt{3}$. Ponieważ podstawa funkcji wykładniczej jest liczbą dodatnią, więc $a = \sqrt{3}$. Funkcja $f$ wyraża się wzorem $f(x) = \sqrt{3}^x$, a funkcja $g(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{x+2}$.

Wykres funkcji $g$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f$ o 2 jednostki w lewo.




Punktacja:

Wyznaczenie wzoru funkcji $f$: 1 punkt

Naszkicowanie wykresu funkcji $g$: 1 punkt.

## Zadanie 29.

*Rozwiązanie:*

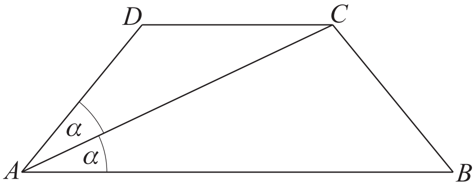
$$L = \sin^2\alpha + \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \sin^2\alpha + \frac{1}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha + \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha + \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sin^2\alpha + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = P.$$

Punktacja:
Przedstawienie pełnego rozumowania: 2 punkty

## Zadanie 30.

Z założenia miary kątów $BAC$ i $CAD$ są równe. Równe są również miary kątów $BAC$ i $DCA$ (gdyż $AB \parallel CD$ ). Wobec tego w trójkącie $ACD$ są dwa kąty o równych miarach: $CAD$ i $ACD$, co oznacza, że $|DA| = |CD|$.
Prowadząc analogiczne rozumowanie wykazujemy, że $|BC| = |CD|$.
Mamy zatem $|BC| = |DA|$, co kończy dowód.




Punktacja:
Wykazanie, że $|DA| = |CD|$: 1 punkt
Dokończenie rozumowania: 2 punkt

## Zadanie 31. pole $= 50(\sqrt{3}-1)$, obwód $= 10(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{2})$

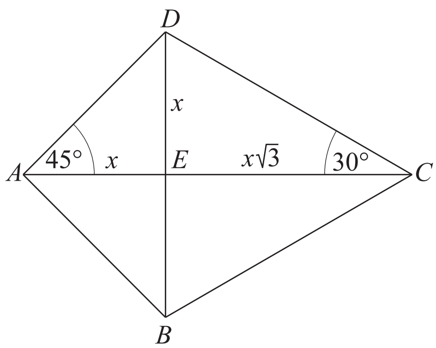
Przyjmijmy oznaczenie $|AE| = x$ (rys. obok). Trójkąt $ADE$ jest prostokątny równoramienny, zatem również $|DE| = x$. Trójkąt $CDE$ jest trójkątem o kątach 30°, 60°, 90°, wobec czego $|EC| = x\sqrt{3}$.

Mamy więc $x + x\sqrt{3} = 10$.

Stąd $x = \dfrac{10}{\sqrt{3}+1} = 5(\sqrt{3}-1)$

Zatem pole powierzchni deltoidu jest równe

$\dfrac{1}{2}\cdot 2x \cdot 10 = 50(\sqrt{3}-1)$

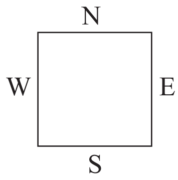



Mamy ponadto $|AD| = |AB| = x\sqrt{2}$ oraz $|CD| = |BC| = 2x$.
Zatem obwód deltoidu jest równy $4x + 2x\sqrt{2} = 2x(2+\sqrt{2}) = 10(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{2})$.

Punktacja:
Wyznaczenie $x = 5(\sqrt{3}-1)$: 2 punkty, (w tym za zapisanie, że $AE = DE$ i $EC = DE\sqrt{3}$: 1 punkt).
Obliczenie pola: 1 punkt
Obliczenie obwodu: 1 punkt

## Zadanie 32. $\frac{1}{3}$

*Rozwiązanie:*

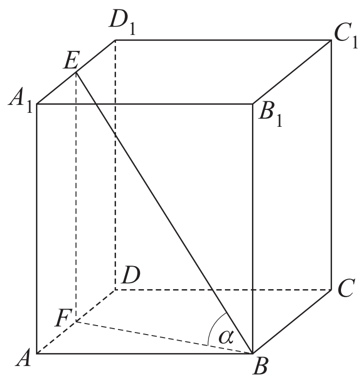



<u>I sposób.</u>
Wszystkich możliwych rozmieszczeń 4 osób przy stoliku jest $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Oznaczmy strony stolika jak na rys obok.

Małżonkowie mogą usiąść na pozycjach W i E na dwa sposoby (mąż W, żona E lub na odwrót), Pozostałe osoby można posadzić na pozycjach N i S również na dwa sposoby. Daje to 4 rozmieszczenia sprzyjające zdarzeniu opisanemu w treści zadania. Analogicznie – małżonkowie mogą usiąść na dwa sposoby na pozycjach N i S. Każdemu z tych rozmieszczeń odpowiadają dwa sposoby rozmieszczenia pozostałych osób na pozycjach W i E. Tak więc łącznie istnieje 8 rozmieszczeń, przy których małżonkowie siedzą naprzeciw siebie. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest zatem równe $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

<u>II sposób.</u>
Jeżeli jedno z małżonków siedzi przy stole, przy którym pozostałe miejsca są wolne, to druga osoba z pary ma do wyboru 3 miejsca, z których tylko jedno jest naprzeciw osoby już siedzącej.
<u>Punktacja:</u>
Wyznaczenie mocy zbioru zdarzeń elementarnych $\left(\overline{\overline{\Omega}} = 24\right)$: 1 punkt
Wyznaczenie mocy zbioru zdarzeń sprzyjających: 2 punkty
Obliczenie prawdopodobieństwa: 1 punkt

## Zadanie 33.




Odpowiedź: $V = 64\sqrt{5}$.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
Punkt $F$ jest środkiem krawędzi $AD$. Wówczas trójkąt $EFB$ jest prostokątny.
Niech $|FB| = x$ oraz $|AF| = a$.
Z tego, że $\mathrm{tg}\alpha = 2$ wynika, że $|EF| = 2x$.
Z tw. Pitagorasa dla trójkąta $EFB$ mamy: $4x^2 + x^2 = 100$, czyli $x = 2\sqrt{5}$.
Zatem $|EF| = 4\sqrt{5}$. Odcinek $EF$ jest wysokością graniastosłupa.
Z tw. Pitagorasa dla trójkąta $AFB$ mamy: $a^2 + 4a^2 = x^2$, czyli $5a^2 = 20$. Wobec tego $a = 2$. Zatem krawędź podstawy graniastosłupa ma długość 4.
Wobec tego $V = 16 \cdot 4\sqrt{5} = 64\sqrt{5}$.

<u>Punktacja:</u>
Pokonanie zasadniczych trudności – wyznaczenie długości wysokości graniastosłupa:
3 punkty (w tym za zaznaczenie na rysunku kąta α: 1 punkt).
Wyznaczenie długości krawędzi podstawy: 1 punkt.
Wyznaczenie objętości: 1 punkt.