PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
ODPOWIEDZI DO ARKUSZA ROZSZERZONEGO

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1	2	3	4
A	**C**	**B**	**D**

Zadanie 1. A

Rozwiązanie:

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)=\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)=\frac{30-12\sqrt{6}}{6}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)=\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)=1.$$

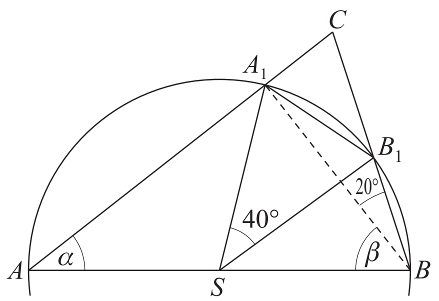
Zadanie 2. C

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=0+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Zadanie 3. B

Rozwiązanie:



$$|\sphericalangle ACB|=180^\circ-\left(\underbrace{\alpha+\beta}_{90^\circ}+20^\circ\right)=70^\circ.$$

Zadanie 4. D

Rozwiązanie:

$\overrightarrow{AB}=[9,3]$, $\overrightarrow{CD}=[3,1]$, $3\overrightarrow{CD}=[9,3]$.

$\overrightarrow{BA}=[-9,-3]$, $-\frac{1}{2}\vec{u}=[-9,-3]$.

$\overrightarrow{DC}=[-3,-1]$, $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=[-3,-1]$.

$9\overrightarrow{CD}=[27,9]$.

ZADANIE OTWARTE z kodowaną odpowiedzią

Zadanie 5. 108

Rozwiązanie:
Zauważmy, że
$$\begin{cases} P(1) = d + f \\ P(2) = 2d + f \end{cases}.$$
Jednocześnie $\begin{cases} W(1) = 6 \\ W(2) = 63 \end{cases}$.

Stąd $\begin{cases} d + f = 6 \\ 2d + f = 63 \end{cases}$.

Odejmując stronami otrzymujemy: $d = 57$. Wtedy $f = -51$.
Zatem $d - f = 108$.

II sposób.
$P(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^3 + ax^2 + bx + c) + dx + f =$
$= x^5 + (a - 3)x^4 + (b - 3a + 2)x^3 + (c - 3b + 2a)x^2 + (-3c + 2b + d)x + 2c + f.$

Stąd $\begin{cases} a - 3 = 1 \\ b - 3a + 2 = 1 \\ c - 3b + 2a = 1 \\ -3c + 2b + d = 1 \\ 2c + f = 1 \end{cases}$.

Dalej
$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 11 \\ c = 26 \\ d = 57 \\ f = -51 \end{cases}. \quad d - f = 108.$$

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 6. $A = \left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ wynosi $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Wyznaczmy argumenty, dla których pochodna jest równa $\frac{1}{2}$.

$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$. $\quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$. $\quad x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

Stąd

$f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$f\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Punkty styczności: $\quad A = \left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Punktacja.
Obliczenie pochodnej (1p).
Wyznaczenie punktów styczności (2p).

Zadanie 7.

Rozwiązanie:

$2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 5 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y + x^2 - 4x + 4 =$

$= \underbrace{(x + y + 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x - 2)^2}_{\geq 0} \geq 0$. Nierówność jest prawdziwa.

II sposób.

$2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 5 = 2x^2 + 2x(y - 1) + y^2 + 2y + 5$.

Funkcja kwadratowa o zmiennej x.

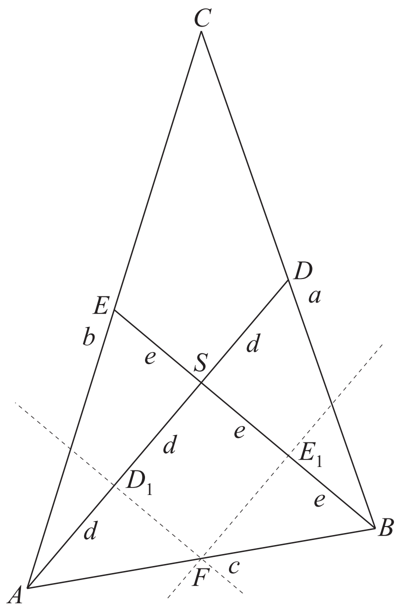
Wtedy

$\Delta = (2(y - 1))^2 - 8(y^2 + 2y + 5) = -4y^2 - 24y - 36 = -4(y + 3)^2 \leq 0$.

Stad nierówność jest prawdziwa.

Punktacja. I sposób		Punktacja. II sposób	
Zapisanie w postaci kwadratów	2p	Obliczenie Δ	1p
Wniosek	1p	Uzasadnienie, że $\Delta \leq 0$	1p
		Wniosek	1p

Zadanie 8.



Rozwiązanie:

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$\cos A = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$. $\quad \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$.

Wykorzystując jeszcze raz to twiedzenie dla trójkątów *ABE* i *ABD* otrzymujemy:

$$9e^2 = c^2 + \frac{1}{4}b^2 - bc\cos A = \frac{4c^2 + b^2}{4} - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

$$9d^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2 - ac\cos B = \frac{4c^2 + a^2}{4} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Dodając stronami otrzymamy:

$$9e^2 + 9d^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

$36e^2 + 36d^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 = 9c^2$.

$4e^2 + 4d^2 = c^2$.

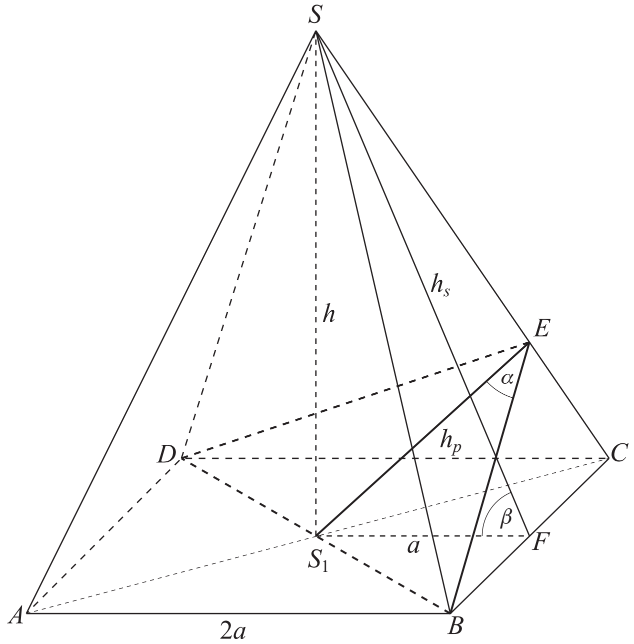
To oznacza, że trójkąt *ASB* jest prostokątny.

Punktacja.
Obliczenie cosinusów kątów A, B (1p).
Twierdzenie cosinusów dla trójkątów *ABD* i *ABE* (1p).
Dokończenie dowodu (1p).

Zadanie 9. $\beta = 45°$

Rozwiązanie:

Oznaczenia tak jak na rysunku.



Ponieważ $-\sqrt{3} = \operatorname{tg}(2\alpha)$, więc $\alpha = 60°$.

Stąd trójkąt BES_1 jest połową trójkąta równobocznego. Zatem BS_1 jest wysokością w trójkącie równobocznym o boku długości $2h_p$.

Czyli $|BS_1| = \dfrac{2h_p\sqrt{3}}{2}$, $a\sqrt{2} = h_p\sqrt{3}$, $h_p = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Dalej

$$|CE|^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{12a^2}{9}.$$

$$|CE| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trójkąty CSS_1 i ECS_1 są podobne.

Stąd $\dfrac{|CS|}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}$, $|CS| = a\sqrt{3}$.

Dalej $h_s = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Stąd $h = a$.

Czyli trójkąt SS_1F jest równoramiennym trójkątem prostokątnym. Zatem $\beta = 45°$.

II sposób.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Ponieważ $-\sqrt{3} = \operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, więc $-\sqrt{3} + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$.

Dalej $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3} = 0$. $\Delta = 4 + 12 = 16$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2+4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2-4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ sprzeczność.

Zatem $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}a}{h_p}$.

Z podobieństwa trójkątów ESS_1 i CSS_1 otrzymujemy:

$\dfrac{h_p}{h} = \dfrac{\sqrt{2}a}{|CS|}$. $\quad \dfrac{|CS|}{h} = \dfrac{\sqrt{2}a}{h_p} = \sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa $|CS|^2 = a^2 + h_s^2 = a^2 + a^2 + h^2 = 2a^2 + h^2$.

Stąd $\dfrac{|CS|^2}{h^2} = \dfrac{2a^2}{h^2} + 1$. $\quad 3 = \dfrac{2a^2}{h^2} + 1$. $\quad \dfrac{2a^2}{h^2} = 2$. $\quad \left(\dfrac{h}{a}\right)^2 = 1$. $\quad \operatorname{tg}\beta = 1$.

Czyli kąt $\beta = 45°$.

Punktacja. I sposób		Punktacja. II sposób	
Wyznaczenie kąta α	1p	Obliczenie tg α	1p
Uzależnienie boków trójkąta CES_1 od a	1p	Związek między h i a	2p
Uzależnienie h_s od a	1p	Dokończenie zadania	1p
Dokończenie zadania	1p		

Zadanie 10. (0-4)

$x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}\right\}$

Rozwiązanie:

Następujące równania są równoważne:

$\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{1}{2}.$

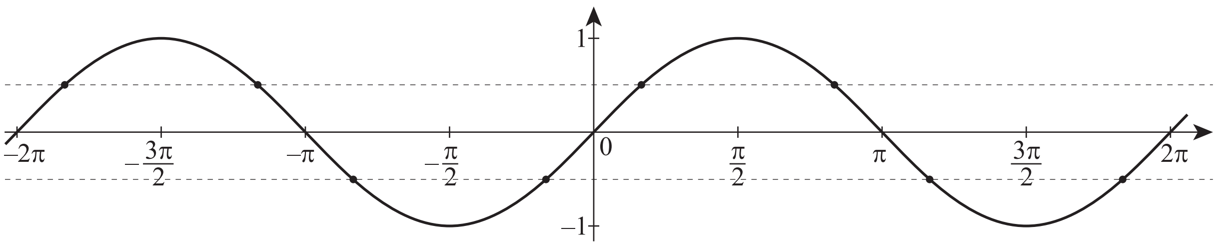
$\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\frac{1}{2}.$

$\sin^2 x - \cos^2 x = -\frac{1}{2}.$

$\sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right) = -\frac{1}{2}.$

$2\sin^2 x = \frac{1}{2}.$

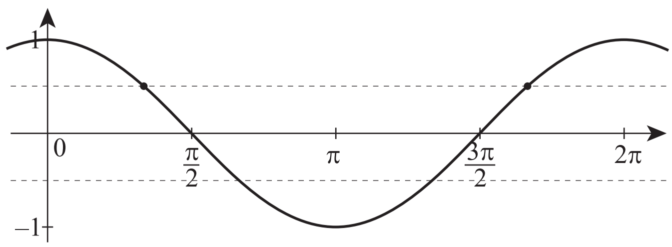
$\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}.$



Odp. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}\right\}$

II sposób.

Następujące równania są równoważne:



$\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{1}{2}.$

$\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\frac{1}{2}.$

$\sin^2 x - \cos^2 x = -\frac{1}{2}.$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}.$

$\cos 2x = \frac{1}{2}.$

Stąd

$\cos t = \frac{1}{2}$, gdzie $t = 2x$ i $t \in \langle -4\pi, 4\pi \rangle$.

$t \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{11\pi}{3}\right\}.$

Odp. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}\right\}.$

Punktacja.

Przekształcenie do postaci $\sin^2 x - \cos^2 x = -\frac{1}{2}$ (1p).

Przekształcenie do postaci $2\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\cos 2x = \frac{1}{2}$ (1p).

Dokończenie rozwiązywania i odpowiedź (2p)

Zadanie 11. $\frac{71}{125}$

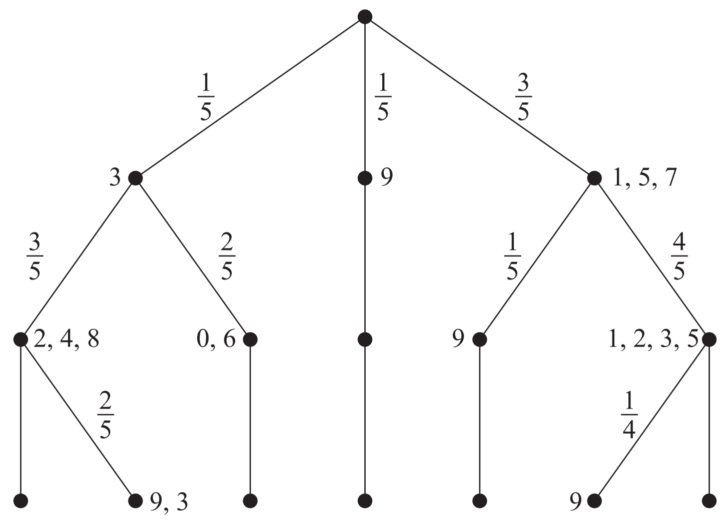
Rozwiązanie:

Oznaczmy zdarzenia:

A_1 za pierwszym razem wylosowano 9.
A_2 za pierwszym razem wylosowano 3.
A_3 za pierwszym razem wylosowano 1 lub 5 lub 7.
B_1 za drugim razem wylosowano dwie liczby nieparzyste wśród nich 9.
B_2 za drugim razem wylosowano 0 lub 6 i liczbę nieparzystą.
B_3 za drugim razem wylosowano 3 lub 9 i nie wylosowano 0 i 6.
C iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 9.
$C = A_1 \cup (A_3 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_3)$.
$P(C) = P(A_1) + P(A_3) \cdot P(B_1 \mid A_3) + P(A_2) \cdot P(B_2 \mid A_2) + P(A_2) \cdot P(B_3 \mid A_2)$.

$$P(C) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{5}{1}\binom{5}{1}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}\binom{5}{1}} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{25 + 30 + 10 + 6}{125} = \frac{71}{125}.$$

II sposób. *Drzewo stochastyczne*



$$P(C) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{2}{25} + \frac{6}{125} = \frac{1}{5} + \frac{8}{25} + \frac{6}{125} = \frac{71}{125}.$$

Punktacja.

Wprowadzenie oznaczeń zdarzeń i zapisanie przy ich pomocy zdarzenia C (lub drzewo) (1p).
Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A_i (1p).
Obliczenie prawdopodobieństw pozostałych zdarzeń (2p)
Dokończenie zadania (1p)

Zadanie 12. $\begin{cases} p = 1 \\ q \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$ lub $\begin{cases} p = -2 \\ q = -1 \end{cases}$.

Rozwiązanie:
Równanie pierwsze ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 wtedy, gdy

$$\begin{cases} \Delta = p^2 - 4q > 0 \\ x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}.$$

Natomiast drugie równanie ma rozwiązania $x_1 + 1$, $x_2 + 1$ wtedy, gdy

$$\begin{cases} \Delta = p^4 - 4pq > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 = p^2 \\ (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = pq \end{cases}.$$

Stąd

$$\begin{cases} p^2 - 4q > 0 \\ p\left(p^3 - 4q\right) > 0 \\ -p + 2 = p^2 \\ q - p + 1 = pq \end{cases}.$$

$p^2 + p - 2 = 0$. $p = 1$ lub $p = -2$.
Dla $p = 1$ mamy:

$$\begin{cases} q - 1 + 1 = q \\ 1 - 4q > 0 \\ 1(1 - 4q) > 0 \end{cases}. \quad \begin{cases} q \in R \\ q < \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Dla $p = -2$ mamy:

$$\begin{cases} q + 2 + 1 = -2q \\ 4 - 4q > 0 \\ -2(-8 - 4q) > 0 \end{cases}. \quad \begin{cases} q = -1 \\ q < 1 \\ q > -2 \end{cases}.$$

Zatem

$$\begin{cases} p = 1 \\ q \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} p = -2 \\ q = -1 \end{cases}.$$

<u>Punktacja</u>.

Zapisanie warunków	(1p).
Otrzymanie równania $p^2 + p - 2 = 0$ i rozwiązanie	(2p).
Dokończenie rozwiązywania	(2p).

Ilustracja.
W pierwszym przypadku mamy równania:
$x^2 + x + q = 0$ oraz $x^2 - x + q = 0$, gdzie $q < \frac{1}{4}$.
Rozwiązania tych równań:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4q}}{2},\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4q}}{2},\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{2} = x_1 + 1,\ x_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4q}}{2} = x_2 + 1.$$

W drugim przypadku mamy równania:
$x^2 - 2x - 1 = 0$ oraz $x^2 - 4x + 2 = 0$.
Rozwiązania tych równań:

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2},\ x_2 = 1 + \sqrt{2},\ x_3 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} = x_1 + 1,\ x_4 = 2 + \sqrt{2} = x_2 + 1.$$

Zadanie 13. $(x-2)^2+y^2=5$ lub $\left(x-\frac{26}{5}\right)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=5$.

Rozwiązanie:

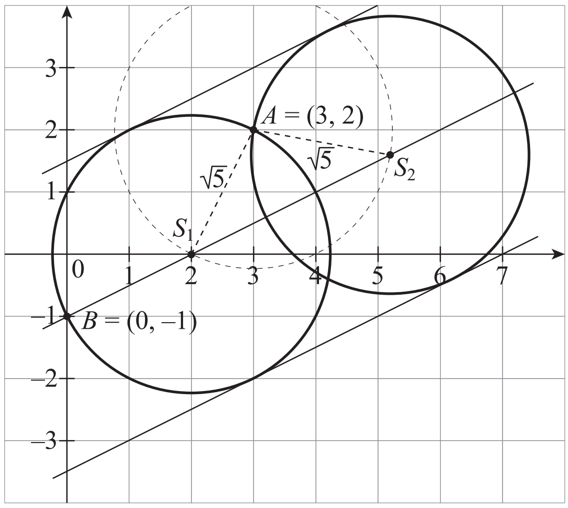
Środek szukanego okręgu leży na prostej równoległej do danych prostych przechodzącej przez punkt $B=(0,-1)$.

Równanie tej prostej: $y=\frac{1}{2}x-1$.

Promień tego okręgu można obliczyć licząc odległość punktu $B=(0,-1)$ od prostej $x-2y-7=0$.

$r=\frac{|0-2(-1)-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

Środek okręgu $S=\left(a,\ \frac{1}{2}a-1\right)$.



Wtedy $|AS|=\sqrt{(a-3)^2+\left(\frac{1}{2}a-3\right)^2}=\sqrt{5}$.

Stąd

$a^2-6a+9+\frac{1}{4}a^2-3a+9=5$.

$\frac{5}{4}a^2-9a+13=0$.

$\Delta=81-65=16$. $\quad a_1=\frac{9-4}{\frac{5}{2}}=2,\ a_2=\frac{9+4}{\frac{5}{2}}=\frac{26}{5}$.

$S_1=(2,0),\ S_1=\left(\frac{26}{5},\frac{8}{5}\right)$.

Równania okręgów:

$(x-2)^2+y^2=5$ lub $\left(x-\frac{26}{5}\right)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=5$.

Punktacja.

Równanie prostej, na której leżą środki	(1p).
Obliczenie długości promienia:	(1p).
Wyznaczenie współrzędnych środków:	(2p).
Równania okręgów	(1p).

Zadanie 14. $\begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ a_1 = 26 \end{cases}$.

Rozwiązanie:

Suma nieskończona szeregu geometrycznego jest równa $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$.

Sześciany wyrazów tego szeregu też tworzą szereg geometryczny. Pierwszy wyraz tego szeregu to $a_1{}^3$, natomiast iloraz jest równy q^3.

Zatem

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 39 \\ \dfrac{a_1^3}{1-q^3} = 18252 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a_1 = 39(1-q) \\ \dfrac{39^3(1-q)^3}{1-q^3} = 18252 \end{cases}.$$

$$\frac{39^3(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)} = 18252.$$

$$\frac{39(1-q)^2}{1+q+q^2} = 12.$$

$39 - 78q + 39q^2 = 12 + 12q + 12q^2$.

$27q^2 - 90q + 27 = 0$.

$3q^2 - 10q + 3 = 0$.

$\Delta = 100 - 36 = 64$. $\quad q_1 = \dfrac{10-8}{6} = \dfrac{1}{3}$ lub $q_2 = 3 > 1$.

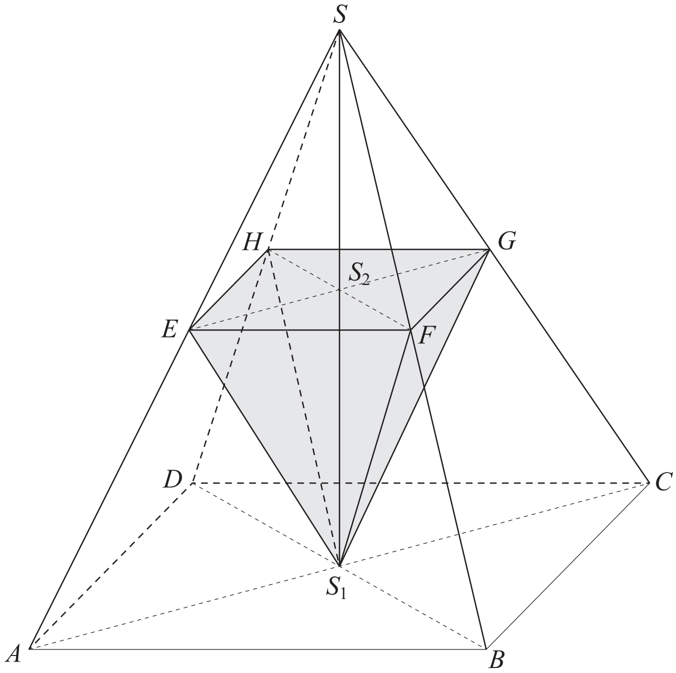
Stąd

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ a_1 = 26 \end{cases}.$$

<u>Punktacja</u>.

Układ równań	(1p).
Równanie z jedną niewiadomą	(1p).
Rozwiązanie układu	(2p).
Odpowiedź	(1p).

Zadanie 15. $\frac{4}{27}V$



Rozwiązanie:
Niech
$|CS_1| = d$, $|SS_1| = h$, $|GS_2| = e$, $|S_2S_1| = h_w$.
Wtedy objętości ostrosłupów wynoszą:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2d^2 \cdot h. \quad V_w = \frac{1}{3} \cdot 2e^2 \cdot h_w.$$

Wykorzystując podobieństwo trójkątów CSS_1 i GSS_2 otrzymujemy:

$$\frac{d}{h} = \frac{e}{h - h_w}. \qquad dh - dh_w = eh.$$

$$dh_w = dh - eh. \qquad h_w = h - \frac{eh}{d}.$$

Zatem

$$V_w = \frac{2}{3}e^2\left(h - \frac{eh}{d}\right) = \frac{2}{3}h\left(e^2 - \frac{1}{d}e^3\right).$$

Niech

$$f(e) = e^2 - \frac{1}{d}e^3,\ e \in (0, d).$$

Wtedy

$$f'(e) = 2e - \frac{3}{d}e^2.$$

$$f'(e) = 0, \text{ dla } e = \frac{2}{3}d.$$

$$f'(e) > 0, \text{ dla } e \in \left(0, \frac{2}{3}d\right).$$

$$f'(e) < 0, \text{ dla } e \in \left(\frac{2}{3}d, d\right).$$

Stąd dla $e = \frac{2}{3}d$ funkcja osiąga wartość największą w przedziale $(0, d)$.

Wtedy

$$h_w = h - \frac{eh}{d} = h - \frac{2}{3}d \cdot \frac{h}{d} = \frac{1}{3}h.$$

$$V_w = \frac{2}{3}e^2h_w = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}d\right)^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{4}{27}\left(\frac{2}{3}d^2h\right).$$

$$V_w = \frac{4}{27}V.$$

II sposób.
Ostrosłupy $EFGHS$ i $ABCDS$ są podobne.
Niech s $(0 < s < 1)$ oznacza skalę podobieństwa tych ostrosłupów.
Wtedy $P_{EFGH} = s^2P_{ABCD}$ oraz $|SS_2| = sh$.
Stąd
$h_w = h - sh = (1 - s)h$.

$$V_w = \frac{1}{3}s^2P_{ABCD}(1 - s)h = s^2(1 - s)V.$$

Należy wyznaczyć największą wartość funkcji $f(s) = -s^3 + s^2$, $s \in (0, 1)$.
$f'(s) = -3s^2 + 2s$.

$f'(s) = 0$, dla $s = \frac{2}{3}$.

$f'(s) > 0$, dla $s \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$.

$f'(s) < 0$, dla $s \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

Zatem dla $s = \frac{2}{3}$ funkcja osiąga wartość największą w przedziale (0, 1).

Wtedy $V_w = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) V = \frac{4}{27} V$

<u>Punktacja</u>.

Wprowadzenie oznaczeń i napisanie wzorów na objętości	(1p).
Uzależnienie objętości ostrosłupa wpisanego od jednej zmiennej	(2p).
Dziedzina funkcji	(1p).
Zbadanie funkcji	(2p).
Dokończenie zadania i odpowiedź	(1p).