PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2019/2020

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Copyright by Nowa Era Sp. z o.o.

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
IV. Użycie i tworzenie strategii.	GIMNAZJUM 10. Figury płaskie. Zdający: 6) oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego; 9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.	**A**

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	R8.7. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach.	**D**

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R11.3. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.	**C**

Zadanie 4. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	P1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg).	**A**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Odpowiedź
III. Modelowanie matematyczne.	P10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	**971**

Uwaga. Zdający otrzymuje 2 punkty wyłącznie po udzieleniu poprawnej odpowiedzi. Nie przyznaje się punktów za cząstkowe elementy rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

Zauważmy, że $A \cup B = A \cup (B - A)$, gdzie $A \cap (B - A) = \varnothing$.
Zatem $P(B \cup A) = P(A) + P(B - A) = \frac{2}{5} + \frac{4}{7} = \frac{14+20}{35} = \frac{34}{35} = 0{,}97142...$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zapisze kolejno cyfry 9, 7, 1.

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną […]. R3.9. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\left\|\left\|x+1\right\|-2\right\| = 3$, $\left\|x+3\right\|+\left\|x-5\right\| > 12$.

Przykładowe rozwiązanie

Otrzymane równanie możemy zapisać w każdym z przedziałów $(-\infty, 2)$, $\langle 2, +\infty)$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.:

- dla $x \in (-\infty, 2)$: $(-x+2) = x(x-2)$;
- dla $x \in \langle 2, +\infty)$: $(x-2) = x(x-2)$.

Równanie $(-x+2) = x(x-2)$ przyjmuje postać $(x-2)(x+1) = 0$. Stąd $x = 2$ lub $x = -1$. Stąd po uwzględnieniu założenia $x = -1$.
Równanie $(x-2) = x(x-2)$ przyjmuje postać $(x-2)(x-1) = 0$, czyli $x = 2$ lub $x = 1$. Stąd po uwzględnieniu założenia $x = 2$.
Równanie ma więc dwa rozwiązania: -1 i 2.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy

- zapisze przedziały $(-\infty, 2)$, $\langle 2, +\infty)$ i co najmniej w jednym z nich zapisze poprawną postać równania bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

albo

- w jednym układzie współrzędnych naszkicuje wykresy dwóch funkcji f i g określonych wzorami: $f(x) = |x - 2|$ oraz $g(x) = x(x - 2)$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy

- w każdym z przedziałów zapisze poprawną postać równania bez użycia symbolu wartości bezwzględnej i w jednym z przypadków doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- w jednym układzie współrzędnych naszkicuje wykresy funkcji $f(x) = |x - 2|$ oraz $g(x) = x(x - 2)$ oraz zaznaczy punkty wspólne obu wykresów.

Zdający otrzymuje .... **3 pkt**

gdy rozwiąże zadanie do końca i poda odpowiedź: -1 i 2.

Uwaga

Jeśli zdający opuści symbol wartości bezwzględnej, nie uwzględniając w żaden sposób przedziału, w którym odpowiednie wyrażenie jest nieujemne (ujemne), to otrzyma **0 punktów**.
W szczególności 0 punktów przyznamy za poniższe rozwiązanie:

$$|x - 2| = x(x - 2),$$
$$(x - 2) = x(x - 2) \text{ lub } (-x + 2) = x(x - 2)$$
$$(x - 2)(1 - x) = 0 \text{ lub } (x - 2)(x + 1) = 0$$
$$(x = 2 \text{ lub } x = 1) \text{ lub } (x = 2 \text{ lub } x = -1),$$
$$x = -1 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 2.$$

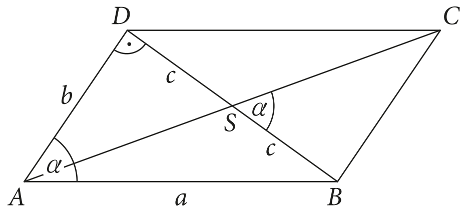
Zauważmy jednak, że zastosowanie takiego algorytmu, ale połączone ze sprawdzeniem otrzymanych wyników (metoda „analizy starożytnych”) może być traktowane jako rozwiązanie poprawne.

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	P7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. *lub* P6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Przykładowe rozwiązania

Niech $a = |AB|$ i $b = |AD|$ będą długościami boków oraz $2c = |BD|$ – długością przekątnej BD równoległoboku $ABCD$.



Wtedy tezę możemy zapisać w postaci $a = b\sqrt{3}$.
Punkt S przecięcia przekątnych równoległoboku jest środkiem każdej z tych przekątnych, więc $|BS| = c$. Trójkąty ABD i SCB są prostokątne i mają równe kąty ostre przy wierzchołkach A i S, co wynika z założenia. Zatem są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|BS|}{|BC|}, \text{ czyli } \frac{b}{2c} = \frac{c}{b},$$

więc

$$b^2 = 2c^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD otrzymujemy

$$|AB| = \sqrt{|AD|^2 + |BD|^2},$$

czyli

$$a = \sqrt{b^2 + (2c)^2} = \sqrt{b^2 + 4c^2} = \sqrt{b^2 + 2b^2} = b\sqrt{3}.$$

To kończy dowód.

Uwaga
Zależność między wielkościami b i c możemy też otrzymać, korzystając z funkcji tangens kąta α w trójkątach prostokątnych ABD i SCB.

$\text{tg}\alpha = \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{2c}{b}$ oraz $\text{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|SB|} = \frac{b}{c}$.

Stąd otrzymujemy $\frac{2c}{b} = \frac{b}{c}$. Dalej jak poprzednio.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający

- zapisze, że trójkąty ABD i SCB są podobne

albo

- zapisze funkcję tangens kąta α w trójkątach prostokątnych ABD i SCB.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów lub przedstawienia $\text{tg}\alpha$ za pomocą dwóch równości, np. $\frac{b}{2c} = \frac{c}{b}$ lub $\text{tg}\alpha = 2$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	R2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: 1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$; 3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Nierówność $3x^3 + 3y^3 > 2x^2y + 2xy^2$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$3\left(x^3 + y^3\right) > 2xy(x + y),$$

$$3(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) > 2xy(x + y).$$

Ponieważ liczby x i y są dodatnie, więc liczba $x + y$ też jest dodatnia. Możemy zatem obie strony nierówności podzielić przez $x + y$ i otrzymujemy nierówność równoważną

$$3\left(x^2 - xy + y^2\right) > 2xy,$$

$$3x^2 - 5xy + 3y^2 > 0,$$

$$x^2 - \frac{5}{3}xy + y^2 > 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}xy + \frac{25}{36}y^2 + \frac{11}{36}y^2 > 0,$$

$$\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{36}y^2 > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż jej lewa strona jest sumą liczby nieujemnej $\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2$ oraz liczby dodatniej $\frac{11}{36}y^2$. Stąd prawdziwa jest teza.

To kończy dowód.

II sposób

Nierówność $3x^3 + 3y^3 > 2x^2y + 2xy^2$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$3\left(x^3 + y^3\right) > 2xy(x + y),$$

$$3(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) > 2xy(x + y),$$

$$(x + y)\left[3\left(x^2 - xy + y^2\right) - 2xy\right] > 0.$$

Ponieważ liczby x i y są dodatnie, więc liczba $x + y$ też jest dodatnia. Zatem powyższa nierówność jest równoważna nierówności $3x^2 - 5xy + 3y^2 > 0$, którą możemy dalej przekształcić równoważnie:

$$3x^2 - 5xy + 3y^2 - xy + xy > 0,$$

$$3x^2 - 6xy + 3y^2 + xy > 0,$$

$$3(x - y)^2 + xy > 0.$$

Ponieważ liczby x, y są dodatnie, więc także ich iloczyn jest dodatni. Zatem ta nierówność jest prawdziwa, gdyż jej lewa strona jest sumą liczby nieujemnej $3(x - y)^2$ oraz liczby dodatniej $x \cdot y$. Stąd prawdziwa jest teza.

To kończy dowód.

Uwaga

Zdający może potraktować wyrażenie $3x^2 - 5xy + 3y^2$ jako trójmian jednej zmiennej, np. x z parametrem y. Wtedy wyróżnik $\Delta = 25y^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3y = -11y^2 < 0$ tego trójmianu jest ujemny, a skoro współczynnik przy x^2 jest dodatni, to trójmian ten przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Schemat oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający

- przekształci nierówność w taki sposób, że wspólny czynnik $(x+y)$ wystąpi po obu stronach, i zapisze, że wyrażenie $(x+y)$ jest dodatnie

albo

- przekształci nierówność w taki sposób, że wyłączy wspólny czynnik $(x+y)$ przed nawias i zapisze, że wyrażenie $(x+y)$ jest dodatnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający

- zapisze trójmian dwóch zmiennych jako sumę kwadratów, np. $3\left(x-\frac{5}{6}y\right)^2+3\cdot\frac{11}{36}y^2$

albo

- zapisze trójmian dwóch zmiennych jako sumę kwadratu wyrażenia i iloczynu przyjmującego wartości dodatnie, np. $3(x+y)^2+xy$

albo

- wyznaczy wyróżnik trójmianu $3x^2-5xy+3y^2$ i naszkicuje wykres lub obliczy wyróżnik i w inny sposób opisze, że wykres trójmianu leży nad osią Ox.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

<u>III sposób</u>

Ponieważ liczby x i y są dodatnie, to $3x^3>2x^3$ i $3y^3>2y^3$. Zatem $3x^3+3y^3>2x^3+2y^3$. Jeśli udowodnimy, że

$$2x^3+2y^3\geqslant 2x^2y+2xy^2,$$

czyli

$$x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2,$$

to tym samym udowodnimy naszą tezę.

Tę nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$x^3-x^2y+y^3-xy^2\geqslant 0,$$
$$x^2(x-y)-y^2(x-y)\geqslant 0,$$
$$\left(x^2-y^2\right)(x-y)\geqslant 0,$$
$$(x-y)(x+y)(x-y)\geqslant 0,$$
$$(x-y)^2(x+y)\geqslant 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż pierwszy czynnik iloczynu $(x-y)^2(x+y)$ jest nieujemny, a drugi dodatni. To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający zapisze oszacowanie prowadzące do rozkładu na czynniki, np.: $3x^3+3y^3>2x^3+2y^3>2x^2y+2xy^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zapisze lewą stronę nierówności otrzymanej w wyniku oszacowania w postaci iloczynowej, np. $2\left(x^2-y^2\right)(x-y)\geqslant 0$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający: P4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. R3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Przykładowe rozwiązania

Przyjmijmy, że q jest ilorazem ciągu (a_n). Zauważmy, że aby spełnione mogły być warunki zadania, to ciąg (a_n) musi być zbieżny do 0, czyli musi być $|q| < 1$. Ponadto $a_1 > 0$, stąd $q \in (0,1)$.

Wtedy $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{a_1 q}{1-q^2}$ oraz $a_4 + a_8 + a_{12} + \cdots = \frac{a_4}{1-q^4} = \frac{a_1 q^3}{1-q^4}$.

Zauważmy, że równanie $\frac{\frac{a_1 q}{1-q^2}}{\frac{a_1 q^3}{1-q^4}} = 10$ można zapisać w postaci równoważnej $\frac{a_1 q}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^4}{a_1 q^3} = 10$.

Po skróceniu i skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia dostajemy: $\frac{(1-q^2)(1+q^2)}{q^2(1-q^2)} = 10$, czyli $\frac{1+q^2}{q^2} = 10$. Prowadzi to do równania kwadratowego $9q^2 = 1$, którego pierwiastkami są liczby: $-\frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{3}$.

Tylko $q = \frac{1}{3}$ spełnia warunki zadania $(q \in (0,1))$.

Uwaga

Równanie $\frac{a_1 q}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^4}{a_1 q^3} = 10$ można przekształcić do postaci równania wielomianowego stopnia 4 lub 5, np. $10q^2(1-q^2) = 1-q^4$ lub $10q^3(1-q^2) = q(1-q^4)$. Wówczas istotnym elementem rozwiązania będzie jego równoważne przekształcenie do postaci iloczynowej, odpowiednio $(1-q^2)(9q^2-1) = 0$ lub $q(1-q^2)(9q^2-1) = 0$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający wykorzysta wzór na sumę szeregu geometrycznego i zapisze dwa równania opisujące nieskończone sumy szeregu zbieżnego jako odpowiednie ułamki algebraiczne, np.:

$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = \frac{a_2}{1-q^2}$, $a_4 + a_8 + a_{12} + \ldots = \frac{a_4}{1-q^4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający

- zapisze równanie kwadratowe zmiennej q, np. $9q^2 - 1 = 0$

albo

- zapisze równanie wielomianowe w postaci iloczynowej, np. $(1-q^2)(9q^2-1) = 0$ lub $q(1-q^2)(9q^2-1) = 0$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający wyznaczy rozwiązania równania i wskaże poprawnie to, dla którego ciąg spełnia warunki zadania: $\frac{1}{3}$.

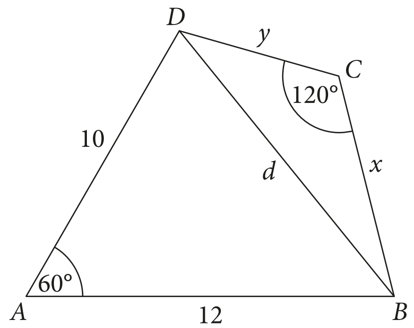
Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia kosinusów.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów w trójkątach ABD i BCD otrzymujemy odpowiednio

$$d^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60° \text{ oraz } d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 120°,$$

$$d^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \text{ oraz } d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$d^2 = 124 \text{ oraz } d^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

Stąd otrzymujemy równanie $x^2 + y^2 + xy = 124$.

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc otrzymujemy drugie równanie z tymi samymi niewiadomymi

$$x + 10 = y + 12,$$

$$x = y + 2.$$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 124 \\ x = y + 2 \end{cases}$

$$(y + 2)^2 + y^2 + (y + 2)y = 124,$$

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 + y^2 + 2y - 124 = 0,$$

$$3y^2 + 6y - 120 = 0,$$

$$y^2 + 2y - 40 = 0,$$

$$(y + 1)^2 - 41 = 0,$$

$$\left(y + 1 - \sqrt{41}\right)\left(y + 1 + \sqrt{41}\right) = 0.$$

Drugi czynnik iloczynu $\left(y + 1 - \sqrt{41}\right)\left(y + 1 + \sqrt{41}\right)$ jest dodatni, więc

$$y + 1 - \sqrt{41} = 0,$$

$$y = \sqrt{41} - 1.$$

Wtedy $x = y + 2 = \sqrt{41} + 1$.

Długości boków BC i CD tego czworokąta są równe $|BC| = \sqrt{41} + 1$ i $|CD| = \sqrt{41} - 1$.

Schemat oceniania I sposobu

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający

- wyznaczy długość przekątnej *BD* lub jej kwadrat, np. $|BD|^2 = 124$

albo

- skorzysta z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i zapisze zależność między bokami *BC* i *CD*, np. $|BC| + 10 = |CD| + 12$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *BCD*, np. $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos 120°$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający

- obliczy długość przekątnej *BD* lub jej kwadrat $|BD|^2$ oraz zapisze równość z dwiema niewiadomymi wynikającą z twierdzenia cosinusów w trójkącie *BCD*

albo

- obliczy długość przekątnej *BD* lub jej kwadrat $|BD|^2$ oraz zapisze zależność między długościami boków *BC* i *CD* wynikającą z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu

albo

- zapisze równość z dwiema niewiadomymi wynikającą z twierdzenia cosinusów w trójkącie *BCD* oraz zapisze zależność między bokami *BC* i *CD* wynikającą z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości któregoś z boków czworokąta, np. $3 \cdot |CD|^2 + 6 \cdot |CD| - 120 = 0$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 pkt**

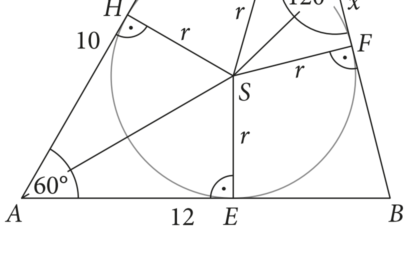
Zdający rozwiąże równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości któregoś z boków czworokąta.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający obliczy długości boków *BC* i *CD* czworokąta: $|BC| = \sqrt{41} + 1$ i $|CD| = \sqrt{41} - 1$.

<u>II sposób</u>

Niech S będzie środkiem okręgu wpisanego w ten czworokąt. Poprowadźmy promienie tego okręgu do punktów styczności z bokami czworokąta i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujmy $|AE|=|AH|$, $|BE|=|BF|$, $|CF|=|CG|$ i $|DG|=|DH|$. Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego czworokąta, więc trójkąty prostokątne AES i AHS mają przy wierzchołku A kąty równe 30°. Są to więc połowy trójkąta równobocznego. Zatem

$$|AE|=|AH|=r\sqrt{3},$$

skąd

$$|BE|=|BF|=12-r\sqrt{3} \text{ oraz } |DH|=|DG|=10-r\sqrt{3}.$$

Podobnie trójkąty CFS i CGS to połowy trójkąta równobocznego, więc

$$x=|CG|=|CF|=\frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Zatem

$$|BC|=12-r\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}=12-\frac{2\sqrt{3}}{3}r \text{ oraz } |CD|=10-r\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}=10-\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Pole wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi połowy obwodu tego wielokąta i promienia okręgu wpisanego w ten wielokąt. Stąd

$$P_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(12+10+12-\frac{2\sqrt{3}}{3}r+10-\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\cdot r=\frac{1}{2}\left(44-\frac{4\sqrt{3}}{3}r\right)\cdot r=22r-\frac{2\sqrt{3}}{3}r^2.$$

Z drugiej strony pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów ABD i BCD, a więc jest równe

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot\left(12-\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\cdot\left(10-\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\cdot \sin 120^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(12-\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\cdot\left(10-\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}+\left(30-\frac{11\sqrt{3}}{3}r+\frac{1}{3}r^2\right)\sqrt{3}=$$

$$=60\sqrt{3}-11r+\frac{\sqrt{3}}{3}r^2.$$

Otrzymujemy więc równanie

$$22r-\frac{2\sqrt{3}}{3}r^2=60\sqrt{3}-11r+\frac{\sqrt{3}}{3}r^2,$$

$$\sqrt{3}r^2-33r+60\sqrt{3}=0,$$

$$r^2-11\sqrt{3}r+60=0,$$

$$r=\frac{11\sqrt{3}+\sqrt{123}}{2} \quad\text{lub}\quad r=\frac{11\sqrt{3}-\sqrt{123}}{2}.$$

Gdy $r=\frac{11\sqrt{3}+\sqrt{123}}{2}$, to

$$|BC|=12-\frac{2\sqrt{3}}{3}r=12-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{11\sqrt{3}+\sqrt{123}}{2}=12-\frac{33+3\sqrt{41}}{3}=1-\sqrt{41}<0,$$

co jest niemożliwe.

Gdy $r=\frac{11\sqrt{3}-\sqrt{123}}{2}$, to

$$|BC|=12-\frac{2\sqrt{3}}{3}r=12-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{11\sqrt{3}-\sqrt{123}}{2}=12-\frac{33-3\sqrt{41}}{3}=1+\sqrt{41} \text{ oraz}$$

$$|CD|=10-r\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}=10-\frac{33-3\sqrt{41}}{3}=\sqrt{41}-1.$$

Odp. Długości boków BC i CD tego czworokąta są równe $|BC|=\sqrt{41}+1$ i $|CD|=\sqrt{41}-1$.

Schemat oceniania II sposobu

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający wyrazi długość co najmniej jednego z odcinków stycznych do okręgu wpisanego w ten czworokąt w zależności od długości jego promienia, np. $|AE|=r\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający wyrazi długości boków BC i CD czworokąta w zależności od długości promienia wpisanego w ten czworokąt: $|BC| = 12 - \frac{2\sqrt{3}}{3}r$ oraz $|CD| = 10 - \frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający zapisze równanie z niewiadomą r, np. $r^2 - 11\sqrt{3}r + 60 = 0$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 pkt**

Zdający rozwiąże równanie z niewiadomą r, np. $r = \frac{11\sqrt{3} + \sqrt{123}}{2}$ lub $r = \frac{11\sqrt{3} - \sqrt{123}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający obliczy długości boków BC i CD czworokąta: $|BC| = \sqrt{41} + 1$ i $|CD| = \sqrt{41} - 1$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R3. Równania i nierówności. Zdający: 1) stosuje wzory Viète'a; 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ $x^2 + (m-1)x + 1 - m^2 = 0$ jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x dla każdej wartości parametru m, więc ma ono dwa różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$, czyli

$$(m-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(1-m^2) > 0,$$
$$(m-1)^2 + 4(m+1)\cdot(m-1) > 0,$$
$$(m-1)(m-1+4(m+1)) > 0,$$
$$(m-1)(5m+3) > 0,$$
$$m \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup (1, +\infty).$$

Warunek $2{x_1}^2 + {x_2}^3 = {x_1}^3 + 2{x_2}^2$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$2({x_1}^2 - {x_2}^2) = {x_1}^3 - {x_2}^3,$$
$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2).$$

Ponieważ $x_1 \neq x_2$, więc $x_1 - x_2 \neq 0$. Możemy zatem podzielić obie strony otrzymanej równości przez $x_1 - x_2$, otrzymując

$$2(x_1 + x_2) = {x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2,$$
$$2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$-2\cdot\frac{m-1}{1} = \left(-\frac{m-1}{1}\right)^2 - \frac{1-m^2}{1},$$
$$-2(m-1) = (m-1)^2 + (m^2-1),$$
$$(m-1)(m-1+2+m+1) = 0,$$
$$(m-1)(2m+2) = 0,$$
$$m = 1 \text{ lub } m = -1.$$

Spośród otrzymanych liczb tylko $m = -1$ należy do zbioru $\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup (1, +\infty)$. Zatem szukaną wartością jest $m = -1$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup (1, +\infty)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równania $2{x_1}^2 + {x_2}^3 = {x_1}^3 + 2{x_2}^2$.

Za tę część zdający może otrzymać 3 punkty:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie równania w postaci:

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2).$$

2 punkty zdający otrzymuje za doprowadzenie do równania kwadratowego z niewiadomą m:

$$-2(m-1) = (m-1)^2 + (m^2 - 1).$$

3 punkty zdający otrzymuje za wyznaczenie miejsc zerowych trójmianu:

$$m = 1 \text{ lub } m = -1.$$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru m z uwzględnieniem wszystkich warunków: $m = -1$. Za tę część zdający może otrzymać 1 punkt.

Uwaga

1) Zdający nie musi rozwiązywać nierówności $\Delta > 0$, o ile sprawdzi, czy dla znalezionych rozwiązań trójmian ma 2 różne pierwiastki. W takiej sytuacji może otrzymać **5 punktów.**
2) Zdający może zapisać równanie $2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2)$ w postaci $(x_1 - x_2)\left[2(x_1 + x_2) - ({x_1}^2 + x_1 x_2 + x_2)^2\right] = 0$ i rozważać alternatywę $x_1 - x_2 = 0$ lub $2(x_1 + x_2) - ({x_1}^2 + x_1 x_2 + x_2)^2 = 0$, tym samym nie dostrzegać, że pierwiastki z założenia mają być różne. Jeśli wówczas pominie warunek $x_1 - x_2 = 0$ lub w jego rozwiązaniu popełni błędy, to za tę cześć rozwiązania będzie mógł otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R2.5. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych. R6.6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Przykładowe rozwiązania

Równanie ma sens tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek: $1 - \sin^3 x \neq 0$, czyli $\sin x \neq 1$.

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ tylko dla $x = \frac{\pi}{2}$ zachodzi równość $\sin x = 1$. Zatem rozwiązań równania poszukujemy w zbiorze $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\rangle$.

<u>I sposób</u>

Zauważmy, że równanie, z dokładnością do dziedziny, można przekształcić równoważnie, otrzymując kolejno:

$$\frac{5(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1}{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)} = 2,$$

$$\frac{5(1 - \sin x)(1 + \sin x) + \sin x - 1}{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)} = 2,$$

$$\frac{(1-\sin x)[5(1+\sin x)-1]}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}=2,$$
$$\frac{5\sin x+4}{1+\sin x+\sin^2 x}=2.$$

Oczywiście wyrażenie $1+\sin x+\sin^2 x$ jest zawsze różne od 0. Pozwala to zapisać powyższe równanie w postaci $5\sin x+4=2\cdot(1+\sin x+\sin^2 x)$ i dalej przekształcać:

$$2\sin^2 x-3\sin x-2=0,$$
$$2\sin^2 x+\sin x-4\sin x-2=0,$$
$$2\sin x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)-4\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-2)=0.$$

Zatem

$$\sin x=-\frac{1}{2}\ \text{ lub }\ \sin x=2.$$

Drugie z tych równań jest sprzeczne, natomiast pierwsze ma w zbiorze $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right\rangle$ dwa rozwiązania: $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{11\pi}{6}$.

<u>II sposób</u>

Po podstawieniu $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ oraz $t=\sin x$ równanie przyjmuje postać $\frac{5(1-t^2)+t-1}{1-t^3}=2$. Ma ono sens dla każdej liczby rzeczywistej $t\neq 1$. Po pomnożeniu obydwu stron tego równania przez $1-t^3$ otrzymujemy

$$5(1-t^2)+t-1=2(1-t^3),$$
$$2t^3-5t^2+t+2=0,$$
$$2t^3-2t^2-3t^2+3t-2t+2=0,$$
$$2t^2(t-1)-3t(t-1)-2(t-1)=0,$$
$$(t-1)(2t^2-3t-2)=0.$$

Stąd

$$t-1=0\ \text{ lub }\ 2t^2-3t-2=0.$$

Ponieważ $t\neq 1$, więc pozostaje rozwiązać tylko równanie kwadratowe $2t^2-3t-2=0$. Możemy to zrobić np. metodą grupowania:

$$2t^2-3t-2=0,$$
$$2t^2+t-4t-2=0,$$
$$t(2t+1)-2(2t+1)=0,$$
$$(2t+1)(t-2)=0$$

Stąd

$$t=2\ \text{ lub }\ t=-\frac{1}{2},$$

czyli

$$\sin x=-\frac{1}{2}\ \text{ lub }\ \sin x=2.$$

Drugie z tych równań jest sprzeczne, natomiast pierwsze ma w zbiorze $\langle 0,2\pi\rangle$ dwa rozwiązania: $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{11\pi}{6}$.

Uwaga

Zdający może łatwo zauważyć, że pierwiastkiem równania $2t^3-5t^2+t+2=0$ jest liczba $t=1$ i podzielić ten wielomian przez dwumian $t-1$. Wtedy

$$2t^3-5t^2+t+2=(t-1)(2t^2-3t-2).$$

Równanie $2t^3 - 5t^2 + t + 2 = 0$ jest więc równoważne alternatywie: $t - 1 = 0$ lub $2t^2 - 3t - 2 = 0$. Stąd $t = 1$ lub $t = -\frac{1}{2}$ lub $t = 2$, czyli $\sin x = 1$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$ lub $\sin x = 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyznaczy dziedzinę równania: $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\rangle$.

Uwagi

1. Zdający nie musi zapisać dziedziny, jeśli z dalszego rozwiązania wynika, że korzysta z faktu, iż mianownik nie może przyjmować wartości 0, np. odrzuca rozwiązanie $t = 1$ w drugim sposobie rozwiązania.
2. Przyznamy również punkt za zapis $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, lub $\sin x \neq 1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- skorzysta ze wzorów skróconego mnożenia, dokona odpowiedniego uproszczenia i zapisze równanie w postaci ułamka algebraicznego, w którym występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna (zmienna) w potędze nie wyższej niż 2, np. $\frac{5\sin x + 4}{1 + \sin x + \sin^2 x} = 2$

albo

- zapisze równanie w postaci wielomianu stopnia 3 zmiennej t i poda jeden z jego pierwiastków, np. $2t^3 - 5t^2 + t + 2 = 0,\ t = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający

- zapisze i rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, np. $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$:
  $\sin x = 2$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$

albo

- rozwiąże równanie wielomianowe: $t = 1,\ t = 2,\ t = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 pkt

Zdający

- zapisze, że wynikiem są dwa rozwiązania równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ i wskaże je na wykresie

albo

- poda wyniki w postaci: $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający wyznaczy rozwiązania równania w zadanym przedziale: $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Uwaga

1. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie korzystając ze wzorów skróconego mnożenia i nie zapisuje na żadnym z etapów, że musi być spełniony warunek $\sin x \neq 1$, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.
2. Jeśli zdający nie wyznacza dziedziny i jako rozwiązanie (np. przy korzystaniu z II sposobu) podaje dodatkowo rozwiązania równania $\sin x = 1$, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający: P3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. R1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Przykładowe rozwiązanie

Aby zliczyć liczbę wszystkich elementów tego zbioru, zauważmy, że:

- gdy pierwszą cyfrą w zapisie jest 3, to na pozostałych miejscach jej zapisu dziesiętnego może stać dowolna z trzech cyfr zbioru $\{1, 2, 3\}$; takich liczb jest więc 3^5;
- gdy pierwszą cyfrą w zapisie jest 2, to:
  - gdy na drugim miejscu jest 3, to na pozostałych miejscach jej zapisu dziesiętnego może stać dowolna z trzech cyfr zbioru $\{1, 2, 3\}$; takich liczb jest więc 3^4;
  - gdy na drugim miejscu także jest 2, to na trzecim miejscu musi stać 2 lub 3, a na pozostałych miejscach jej zapisu dziesiętnego może stać dowolna z trzech cyfr zbioru $\{1, 2, 3\}$; takich liczb jest więc $2 \cdot 3^3$.

Zatem $|\Omega| = 3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot (9 + 3 + 2) = 27 \cdot 14 = 378$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby ze zbioru opisanego powyżej (Ω), w której zapisie dziesiętnym każde dwie sąsiednie cyfry różnią się o 1.
Rozważmy przypadki:

- pierwszą, licząc od lewej strony, cyfrą wylosowanej liczby jest 2.
  Wtedy mamy 4 takie liczby. Kolejne cyfry tych liczb zilustrujmy na poniższym schemacie.

$$2-3-2\left\langle\begin{array}{l} 1-2\left\langle\begin{array}{l}1\\3\end{array}\right. \\ 3-2\left\langle\begin{array}{l}1\\3\end{array}\right. \end{array}\right.$$

- pierwszą cyfrą wylosowanej liczby jest 3.
  Wtedy mamy 4 takie liczby. Kolejne cyfry tych liczb zilustrujmy na poniższym schemacie.

$$3-2\left\langle\begin{array}{l} 1-2\left\langle\begin{array}{l}1-2\\3-2\end{array}\right. \\ 3-2\left\langle\begin{array}{l}1-2\\3-2\end{array}\right. \end{array}\right.$$

Zatem $|A| = 4 + 4 = 8$.

Wszystkie zdarzenia elementarne, polegające na wylosowaniu jednej liczby, są jednakowo prawdopodobne, więc korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa otrzymujemy:

$$P(A) = \frac{8}{27 \cdot 14} = \frac{4}{189}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania sprowadza się w istocie do zliczenia elementów w dwóch różnych schematach kombinatorycznych. Dlatego ocenianie będzie obejmowało niezależnie trzy etapy.

Pierwszy etap obejmuje obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych (2 punkty).

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy

- opisze warunki, jakie muszą być spełnione, np. pierwszą cyfrą musi być „3" i pozostałe dowolne lub „2", a następnie „3" i dowolne lub układ 2-2-2 lub 2-2-3 i pozostałe dowolne

albo

- obliczy, ile jest wszystkich liczb spełniających warunki zadania, gdy pierwszą cyfrą jest „3" (3^5)

albo

- obliczy, ile jest wszystkich liczb spełniających warunki zadania, gdy pierwszą cyfrą jest „2" i drugą „3" (3^4)

albo

- obliczy, ile jest wszystkich liczb spełniających warunki zadania, gdy pierwszą cyfrą jest „2" i drugą „2" $(2 \cdot 3^3)$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: 378 ($3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3$ lub $14 \cdot 3^3$ itp.).

Drugi etap obejmuje obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających (2 punkty).

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy

- wypisze co najmniej dwie liczby spełniające warunki zadania

albo

- wypisze wszystkie liczby, w których zapisie cyfry różnią się o 1 i nie uwzględni warunku, że mają to być liczby większe niż 222 000, lub poda, ile jest takich liczb: 16.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy wyznaczy liczbę zdarzeń sprzyjających (8) lub je wszystkie wypisze.

Trzeci etap obejmuje obliczenie szukanego prawdopodobieństwa (1 punkt).

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy obliczy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{4}{189}$.

Uwaga
Zdający otrzymuje punkt za III etap tylko wtedy, gdy otrzyma w sumie co najmniej 2 punkty za dwa wcześniejsze etapy.

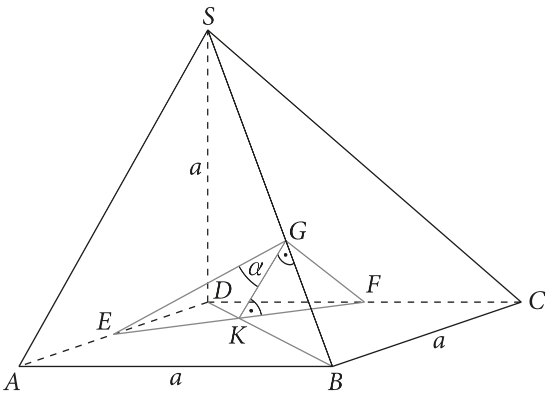
Zadanie 14. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	P9.1. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ze wzoru na długość przekątnej kwadratu otrzymujemy

$$|AC| = |BD| = a\sqrt{2},$$

a z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta mamy

$$|EF| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ więc } |EK| = \frac{a\sqrt{2}}{4} = |DK|.$$

Zatem

$$|BK| = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BDS* wynika, że

$$|BS| = \sqrt{|BD|^2 + |DS|^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Trójkąty *KBG* i *SBD* są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *B*. Stąd otrzymujemy

$$\frac{|KG|}{|KB|} = \frac{|DS|}{|BS|}, \text{ czyli } \frac{|KG|}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a} = \frac{a}{a\sqrt{3}}.$$

Stąd

$$|KG| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Zatem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|EK|}{|KG|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd otrzymujemy $\alpha = 30°$, a w konsekwencji $|\sphericalangle EGF| = 2\alpha = 2 \cdot 30° = 60°$.

Uwaga

Zdający może dążyć do zastosowania twierdzenia cosinusów.

Wtedy $|EG| = |FG| = \sqrt{|EK|^2 + |KG|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

W tym miejscu zdający powinien zauważyć, że trójkąt *EGF* jest równoboczny.
Ale można oczywiście zapisać i zastosować twierdzenie cosinusów:

$$|EF|^2 = |EG|^2 + |FG|^2 - 2 \cdot |EG| \cdot |FG| \cdot \cos(2\alpha),$$

czyli kolejno

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(2\alpha),$$

$$\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-2\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\cos(2\alpha).$$

Stąd $\cos(2\alpha)=\frac{\frac{a^2}{2}}{a^2}=\frac{1}{2}$.

Zatem $|\sphericalangle EGF|=2\alpha=60°$.

Schemat oceniania I sposobu

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający
- wyznaczy długość odcinka EF w zależności od długości krawędzi podstawy: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

albo
- wyznaczy długość krawędzi BS w zależności od długości krawędzi podstawy: $a\sqrt{3}$

albo
- zapisze, że trójkąty BDS i BKG są podobne.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze równość prowadzącą do wyznaczenia długości odcinka KG, np. $\frac{|KG|}{|KB|}=\frac{|DS|}{|BS|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka KG: $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 pkt

Zdający
- obliczy tangens połowy kąta EGF: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

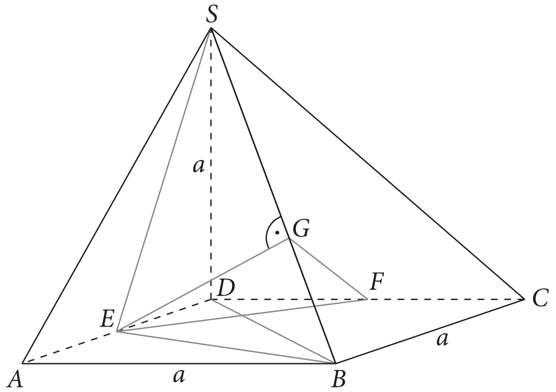
albo
- obliczy długość jednego z odcinków EG lub FG: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający sformułuje odpowiedź: $|\sphericalangle EGF|=60°$.

<u>II sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długości odcinków SE i BE:

$|SE|^2 = |BE|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$|SE| = |BE| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

Zauważmy, że EG jest wysokością trójkąta równoramiennego BES.
Obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa BS (przeciwprostokątna w trójkącie SDB):

$|BS|^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$

$|BS| = a\sqrt{3}$

A następnie, ponownie z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość EG.

$|EG|^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2$

$|EG| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Obliczamy długość odcinka EF (przeciwprostokątna w trójkącie EFD lub przekątna kwadratu o boku $\frac{a}{2}$).

$|EF| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Z tego wynika, że trójkąt EFG jest równoboczny, a zatem $|\sphericalangle EGF| = 60°$.

Schemat oceniania II sposobu

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający
- wyznaczy długość odcinka EF w zależności od długości krawędzi podstawy: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

albo
- wyznaczy długość krawędzi BS w zależności od długości krawędzi podstawy: $a\sqrt{3}$

albo
- wyznaczy długość odcinka ES lub odcinka BE w zależności od długości krawędzi podstawy: $\frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający wyznaczy długości przynajmniej 3 odcinków spośród: EF, BS, ES i BE.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający zauważy, że odcinek EG jest wysokością trójkąta równoramiennego EBS i wyznaczy jego długość: $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 pkt

Zdający zauważy, że trójkąt EFG jest równoboczny.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający sformułuje odpowiedź: $|\sphericalangle EGF| = 60°$.

Zadanie 15. (0–7)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Przykładowe rozwiązania

a)

Kwadraty odległości punktu P od punktów A, B i C są równe

$|PA|^2 = (x-0)^2 + (x^2+2-6)^2 = x^2 + x^4 - 8x^2 + 16 = x^4 - 7x^2 + 16,$

$|PB|^2 = (x-2)^2 + (x^2+2-0)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^4 + 4x^2 + 4 = x^4 + 5x^2 - 4x + 8,$

$|PC|^2 = (x-4)^2 + (x^2+2-12)^2 = x^2 - 8x + 16 + x^4 - 20x^2 + 100 = x^4 - 19x^2 - 8x + 116.$

Zatem funkcja f jest określona wzorem

$f(x) = (x^4 - 7x^2 + 16) + (x^4 + 5x^2 - 4x + 8) + (x^4 - 19x^2 - 8x + 116) = 3x^4 - 21x^2 - 12x + 140.$

b)

I sposób

Ramiona BA i BC kąta ABC zawierają się w prostych o równaniach $y = -3(x-2)$ i $y = 6(x-2)$. Zatem wnętrze kąta jest opisane układem nierówności $y > -3x + 6$ i $y > 6x - 12$.

Punkt $P = (x, x^2+2)$ leży wewnątrz kąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają ten układ nierówności, czyli $x^2 + 2 > -3x + 6$ i $x^2 + 2 > 6x - 12$.

Zauważmy, że nierówność $x^2 + 2 > -3x + 6$ można przekształcić równoważnie:

$$x^2 + 3x - 4 > 0,$$
$$(x-1)(x+4) > 0.$$

Jest ona prawdziwa dla $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

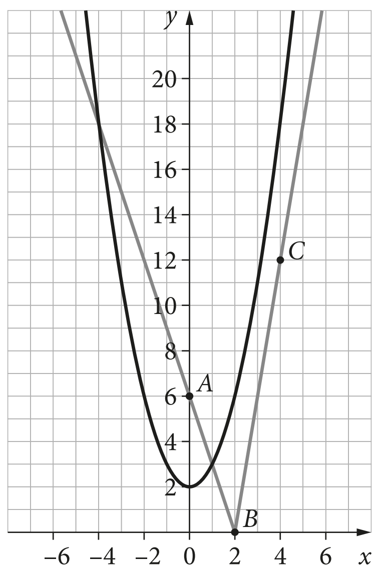
Analogicznie przekształcając nierówność $x^2 + 2 > 6x - 12$ otrzymujemy:

$$x^2 - 6x + 14 > 0,$$
$$(x-3)^2 + 5 > 0.$$

Jest ona prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.
Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

II sposób

Aby wyznaczyć dziedzinę danej funkcji, naszkicujmy w układzie współrzędnych półproste BA i BC, które są ramionami kąta oraz parabolę $y = x^2 + 2$, która jest zbiorem punktów postaci (x, x^2+2).



Wystarczy sprawdzić, dla jakich argumentów x parabola leży wyżej niż prosta AB, czyli rozwiązać nierówność:

$$x^2 + 2 > -3x + 6$$
$$x^2 + 3x - 4 > 0$$

$$(x+4)(x-1) > 0$$
$$x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty).$$

Zatem dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

c)

Rozważmy teraz funkcję $f(x) = 3x^4 - 21x^2 - 12x + 140$ określoną na zbiorze $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

Wyznaczamy pochodną $f'(x) = 12x^3 - 42x - 12 = 6(2x^3 - 7x - 2)$ i znajdujemy jej miejsca zerowe.

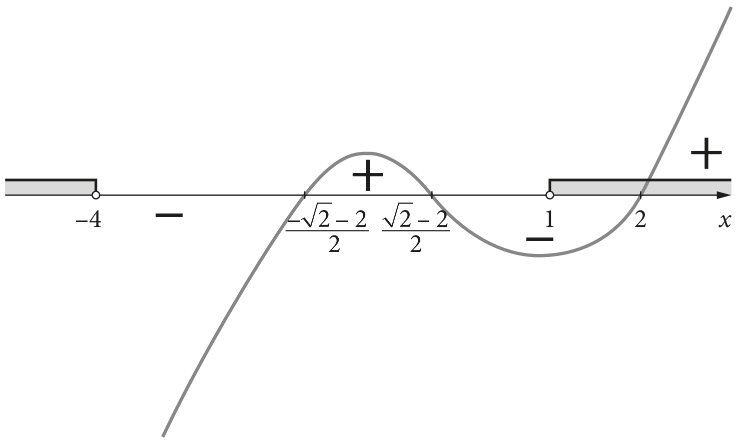
$$f'(x) = 0 \iff 2x^3 - 7x - 2 = 0, \text{ przy czym } D_{f'} = D_f$$

Zauważmy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $2x^3 - 7x - 2$, zatem możemy ten wielomian podzielić przez dwumian $x - 2$ i zapisać go w postaci iloczynu:

$$2x^3 - 7x - 2 = (x-2)(2x^2 + 4x + 1).$$

Trójmian kwadratowy $2x^2 + 4x + 1$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$, $x_2 = \frac{-\sqrt{2}-2}{2}$, ale żaden z nich nie należy do dziedziny funkcji f' (ani f).

Zatem $f'(x) = 0 \iff x = 2$.



Badany znak pochodnej w jej dziedzinie:
$f'(x) > 0 \iff x > 2$
$f'(x) < 0 \iff x < -4$ lub $1 < x < 2$

Zatem w każdym z przedziałów $(-\infty, -4)$, $(1, 2)$ funkcja f jest malejąca, a w przedziale $(2, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. Dla $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne równe $f(2) = 80$. Ponieważ w przedziale $(1, +\infty)$ funkcja f ma jedno ekstremum lokalne i jest ciągła, więc $f(2)$ jest najmniejszą wartością tej funkcji w tym przedziale. W przedziale $(-\infty, -4)$ funkcja f jest malejąca, więc wystarczy obliczyć $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$. Granica ta jest równa

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} (3x^4 - 21x^2 - 12x + 140) = 620.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 620 > 80 = f(2)$, więc $f(2)$ jest najmniejszą wartością funkcji f.

Szukanym punktem P jest zatem $P = (2, 2^2 + 2) = (2, 6)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (1 punkt) obejmuje zapisanie kwadratów odległości lub odległości każdego z wierzchołków od punktu P, np. $|PA|^2 = (x-0)^2 + (x^2+2-6)^2$, $|PB|^2 = (x-2)^2 + (x^2+2-0)^2$, $|PC|^2 = (x-4)^2 + (x^2+2-12)^2$ oraz poprawne rozwinięcie i zapisanie wzoru funkcji f.

b) Drugi etap (2 punkty) obejmuje wyznaczenie dziedziny funkcji, co wiąże się z geometryczną interpretacją zadania (rozwiązanie układu nierówności lub analiza położenia paraboli względem ramion kąta).

Uwaga
Zdający za ten etap otrzyma 1 punkt, jeśli narysuje poprawnie rysunek i zapisze warunek $x^2 + 2 > -3x + 6$ (lub równoważny) lub zapisze dwa warunki: $x^2 + 2 > -3x + 6$ i $x^2 + 2 > -3x + 6$ (lub równoważne).

c) Trzeci etap (4 punkty) składa się z czterech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 12x^3 - 42x - 12$ (1 punkt)
- obliczenie miejsc zerowych f':
  $x_1 = 2, x_2 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}, x_3 = \frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$ (1 punkt)
- analiza znaku pochodnej funkcji f, wyznaczenie przedziałów monotoniczności f i uzasadnienie, że dla $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne w przedziale $(1, +\infty)$ (1 punkt)
- uzasadnienie, że dla $x = 2$ funkcja f osiąga wartość najmniejszą w całej dziedzinie, oraz wyznaczenie współrzędnych punktu $P = (2, 6)$ (1 punkt)