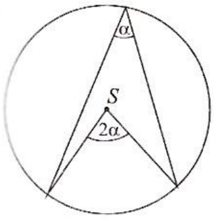
3. OKRĄG I WIELOKĄT

3.1 OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

DEFINICJE I TWIERDZENIA

KĄT WPISANY. KĄT ŚRODKOWY



Kąt wpisany w okrąg. Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona zawierają dwie cięciwy, nazywamy kątem wpisanym w okrąg.

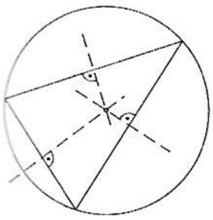
Kąt środkowy okręgu. Kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu, nazywamy kątem środkowym okręgu.

Tw. o kącie wpisanym i kącie środkowym opartym na tym samym łuku. Miara kąta wpisanego jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

Wniosek 1. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Wniosek 2. Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.

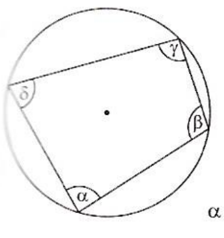
OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE



Tw. o okręgu opisanym na trójkącie. Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środkiem okręgu opisanego na trójkącie jest punkt przecięcia symetralnych jego boków.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

OKRĄG OPISANY NA CZWOROKĄCIE



$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

Tw. o okręgu opisanym na czworokącie. Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe (po 180°).

OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE FOREMNYM

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.

ZADANIA

kąt wpisany i kąt środkowy, okrąg opisany na trójkącie

210. Wierzchołki trójkąta ostrokątnego ABC należą do okręgu o środku S. Oblicz miary kątów trójkąta ABC wiedząc, że $|\angle ASB| = 80°$ i $|\angle BSC| = 130°$.

211. Trójkąt ostrokątny ABC wpisany jest w okrąg o środku O. Znajdź miarę kąta wypukłego BOA, jeżeli $|\angle BAC| = 50°$ i $|\angle AOC| = 160°$.

212.* Kąt ABC jest kątem wpisanym w okrąg o środku O, opartym na łuku AC. Wykaż, że jeżeli $|\angle ABC| = 45°$, to odcinki AO i CO są prostopadłe.

213.* Kąt wpisany w okrąg jest oparty na łuku, którego długość stanowi $\frac{1}{20}$ długości okręgu. Znajdź miarę tego kąta.

214.* Odległość cięciwy od środka okręgu jest równa połowie jej długości. Wyznacz miary kątów wpisanych opartych na tej cięciwie.

215.* Różne punkty A, B, K należą do okręgu o środku S. Oblicz miarę kąta AKB wiedząc, że $|\angle ASB| = |\angle AKB|$.

216.* Podstawa AB ostrokątnego trójkąta równoramiennego ABC – wpisanego w okrąg o środku S – tworzy z odcinkiem AS kąt o mierze $50°$. Oblicz miarę kąta ABC.

217.* Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy bokowi AC. Znajdź miarę kąta B tego trójkąta wiedząc, że kąt ten jest a) ostry; b) rozwarty.

218.* Punkty A, B, C dzielą okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi $2:3:4$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

219. Wierzchołki trójkąta należą do okręgu, przy czym jeden z boków trójkąta jest średnicą tego okręgu. Największy kąt tego trójkąta jest o $70°$ większy od najmniejszego. Oblicz miary kątów trójkąta.

220. W okrąg wpisano trójkąt KLM oraz poprowadzono średnicę AL i cięciwę AK. Wyznacz kąty trójkąta LAK, wiedząc, że kąt KML ma miarę $29°$.

221. Wierzchołki trapezu równoramiennego należą do okręgu. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą tego okręgu, a przekątna trapezu tworzy z podstawami kąt α. Znajdź kąty trapezu.

222.** Dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na nim odpowiednio w punktach K i L. Oblicz miary kątów czworokąta $ABKL$ wiedząc, że $|\angle A| = 60°$ i $|\angle B| = 40°$.

223.* Na danym okręgu odmierzamy kolejno łuki AB, BC i CD odpowiadające kątom środkowym 40°, 80° i 100°. Wyznacz miary kątów utworzonych przez proste AC i BD.

224.** W okrąg wpisano trójkąt ABC, w którym $|\angle A| = 50^\circ$ i $|\angle B| = 70^\circ$. Przez wierzchołek kąta C poprowadzono styczną do okręgu, przecinającą przedłużenie boku AB w punkcie D. Oblicz miary kątów trójkąta BCD.

225.*** Punkty A, B, C i D należą do okręgu i dzielą go na cztery łuki AB, BC, CD i DA. Środkami tych łuków są punkty odpowiednio P, Q, R i S. Wykaż, że odcinki PR i QS są prostopadłe.

» » » » » » » » » » » » »« « « « « « « « « « « « «

226.* Na trójkącie ABC, w którym $|\angle ABC| = 45^\circ$, opisano okrąg o promieniu 3. Oblicz długość boku AC.

227.* W okręgu o promieniu r poprowadzono cięciwę AB, która ze średnicą AC tworzy kąt α. Oblicz odległość punktu B od średnicy AC.

228.* W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt. Środek okręgu leży na jednym z boków, a stosunek długości pozostałych boków jest równy $3 : 4$. Oblicz długości boków trójkąta.

229.* Na ostrokątnym trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) opisano okrąg o środku S. Wiedząc, że obwód trójkąta wynosi p, zaś miara kąta wypukłego ASB jest równa α, oblicz długość ramienia trójkąta.

230.** Na trójkącie ostrokątnym, w którym dwa kąty mają miary α i β, opisano okrąg o promieniu R. Znajdź długość tego boku trójkąta, do którego przylegają dane kąty.

231.*** W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD.

» » » » » » » » » » » » »« « « « « « « « « « « « «

232. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ma długość R. Oblicz obwód trójkąta.

233.* W okrąg o promieniu 13 wpisano rozwartokątny trójkąt równoramienny o podstawie 10. Znajdź długość wysokości trójkąta poprowadzonej do podstawy.

234.* Na trójkącie równoramiennym opisano okrąg o promieniu R. Wysokość trójkąta poprowadzono do podstawy jest równa połowie promienia tego okręgu. Oblicz obwód trójkąta.

235.** Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3 : 5. Oblicz długość ramienia trójkąta.

236.** Bok AC trójkąta ABC jest równy promieniowi okręgu o opisanego na tym trójkącie, a stosunek boku BC do promienia okręgu o jest równy $\sqrt{2}:1$. Znajdź kąty tego trójkąta wiedząc, że kąt BAC jest rozwarty.

okrąg opisany na czworokącie

237. Na czworokącie $KLMN$ opisano okrąg. Miara kąta K tego czworokąta jest o 50° mniejsza od miary kąta M i o 50° większa od miary kąta L. Oblicz miary kątów czworokąta $KLMN$.

238. O kątach wpisanego w okrąg czworokąta $ABCD$ wiadomo, że $|\angle A| = 4 \cdot |\angle C|$ i $4 \cdot |\angle B| = 5 \cdot |\angle D|$. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.

239. Suma kątów A i B czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg jest równa 100°, a suma kątów B i C tego czworokąta wynosi 200°. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.

240. Na czworokącie $KLMN$ opisano okrąg. Przekątna LN jest średnicą tego okręgu. Oblicz miary kątów czworokąta $KLMN$ wiedząc, że miara kąta N jest trzy razy większa od miary kąta L.

241. Przekątna AC czworokąta $ABCD$ – wpisanego w okrąg o środku S – jest średnicą tego okręgu. Wiedząc, że kąt A jest ostry i $|\angle BSD| = 100^\circ$, oblicz kąty czworokąta $ABCD$.

242.* Bok AB czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie. Przekątna AC tworzy z bokiem AB kąt 20° (α). Oblicz miarę kąta D tego czworokąta.

243.* Różne punkty K, L, M, N są punktami wspólnymi dwusiecznych kątów o wierzchołkach odpowiednio A i B, B i C, C i D, D i A trapezu $ABCD$. Wykaż, że na czworokącie $NMLK$ można opisać okrąg.

244.* Boki BC i CD czworokąta $ABCD$ mają równe długości. Przekątna BD tworzy z bokiem DC kąt 50°, a z bokiem AD kąt 60°. Oblicz kąty czworokąta $ABCD$, wiedząc, że można na nim opisać okrąg.

245.* Bok AB czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie. Boki BC i CD mają równą długość, a przekątna BD tworzy z bokiem BC kąt 20°. Oblicz kąty czworokąta $ABCD$.

246.** Kąt DAB czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg, ma miarę 120°, a boki BC i CD mają długość $2\sqrt{3}$.
a) Oblicz długość przekątnej BD;
b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$;
c) Wykaż, że przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB.

247.** Dane są miary 20° (α) i 40° (β) kątów utworzonych przez przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg. Oblicz miary kątów czworokąta.

248.** Boki AB i BC czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg są równe przekątnej AC. Kąt BAD ma miarę 80°. Znajdź miary pozostałych kątów czworokąta $ABCD$.

249.*** W trójkącie ABC dwusieczne BS i CT przecinają się w punkcie O. Wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg. Znajdź miarę kąta A.

250.*** Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.

okrąg opisany na innym wielokącie

251.* Znajdź promień okręgu opisanego na n-kącie foremnym o boku a.

252. Promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość R. Oblicz długość krótszej przekątnej sześciokąta.

253.** Promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym ma długość R. Oblicz długość boku ośmiokąta.

254.*** Promień okręgu opisanego na dziesięciokącie foremnym ma długość R. Oblicz długość boku dziesięciokąta.

255.** Na pięciokącie $ABCDE$, w którym $|AB| = |BC| = |CD|$ i $|\angle CED| = 30^\circ$, opisano okrąg o środku S. Udowodnij, że punkt S należy do przekątnej AD tego pięciokąta.