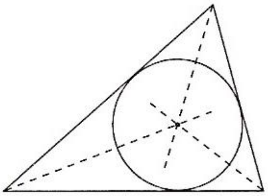
3.2 OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

DEFINICJE I TWIERDZENIA

OKRĄG WPISANY W TRÓJKĄT



Tw. o okręgu wpisanym w trójkąt. W każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych jego kątów.

Okrąg wpisany w trójkąt równoboczny. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a: $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

OKRĄG WPISANY W CZWOROKĄT

$a+c=b+d$

Tw. o okręgu wpisanym w czworokąt. W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe.

Środkiem okręgu wpisanego w czworokąt jest punkt przecięcia dwusiecznych jego kątów.

OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT FOREMNY

W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg.

TO WARTO WIEDZIEĆ

⇒ Promienie okręgu wpisanego w trójkąt (czworokąt), poprowadzone do punktów styczności okręgu z bokami trójkąta (czworokąta), są prostopadłe do boków.

ZADANIA

okrąg wpisany w trójkąt

256. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 5 (*d*) dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz długość boku trójkąta.

257. W trójkącie ABC mamy dane: $|\angle A|=20^\circ$, $|\angle B|=60^\circ$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz miary kątów ASB, BSC, ASC.

258.** W trójkąt, którego dwa kąty mają miary 40° i 60°, wpisano okrąg. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami trójkąta.

259. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość a, zaś kąt przy podstawie ma miarę α. Znajdź długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

260.* W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) miara kąta ACB jest równa 2α. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość r. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

261.* Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 60° (α) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 1 (r). Oblicz obwód trójkąta.

262.* Dwa kąty trójkąta mają miary α i β. Promien okręgu weń wpisanego ma długość r. Oblicz długość tego boku trójkąta, do którego przylegają dane kąty.

263.** Jeden z boków trójkąta ma długość c, kąty przyległe do niego mają miary α i β. Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

264.** Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 12, a wysokość poprowadzona do podstawy ma długość 8. Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

265.** Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny ma długość r i jest pięć razy krótszy od wysokości poprowadzonej do podstawy. Oblicz długość podstawy trójkąta.

266.** W trójkąt równoboczny o boku 4 (a) wpisano trzy okręgi o równych promieniach w ten sposób, że każdy z nich jest styczny do dwóch boków trójkąta i do dwóch pozostałych okręgów. Oblicz długość promieni tych okręgów.

267.*** Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 i 4.

268.*** W trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej 8 (c) wpisano okrąg o promieniu 1 (r). Oblicz obwód tego trójkąta.

269.*** Na okręgu o promieniu r opisano trójkąt prostokątny, którego jeden z wierzchołków oddalony jest od środka okręgu o $r\sqrt{17}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.

270.*** Wyznacz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, mając dany kąt między ramionami α.

271.*** Znajdź stosunek sumy przyprostokątnych trójkąta prostokątnego do sumy promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

okrąg wpisany w czworokąt

272. W czworokącie $KLMN$ bok KL jest o 3 krótszy od boku MN, $|LM|=8$, a $|KN|=9$. Oblicz długości boków KL i MN wiedząc, że w czworokąt $KLMN$ można wpisać okrąg.

273. Obwód czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu wynosi 60 (p). Bok AB tego czworokąta jest 4 (n) razy dłuższy od boku CD. Oblicz długość boku AB.

274. W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Bok AB tego czworokąta jest siedem razy krótszy od boku CD, zaś bok AD jest trzy razy krótszy od boku BC. Ile razy bok BC jest dłuższy od boku AB?

275. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Wykaż, że środki tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg.

276. Dłuższa przekątna rombu, którego kąt ostry ma miarę α, ma długość p. Znajdź promień okręgu wpisanego w ten romb.

277. Ramię trapezu równoramiennego, w który wpisano okrąg, ma długość c. Znajdź obwód trapezu.

278.* Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w trapez równoramienny o podstawach 8 (a) i 2 (b).

279.* Ramię trapezu równoramiennego, w który wpisano okrąg, ma długość 10 (c) i tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze 60° (α). Oblicz długości podstaw trapezu.

280.* Stosunek długości ramion trapezu opisanego na okręgu o promieniu 6 wynosi $3:4$. Obwód trapezu jest równy 70. Oblicz długości podstaw trapezu.

281.* W trapez równoramienny o kącie ostrym 60° (α) wpisano okrąg. Wyznacz stosunek obwodu trapezu do średnicy okręgu.

282.* W trapez o kątach ostrych α i β wpisano okrąg o promieniu r. Oblicz obwód tego trapezu.

283.* Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość d. Znajdź obwód tego trapezu wiedząc, że można weń wpisać okrąg.

284.** Stosunek długości przekątnych równoległoboku wynosi $2:1$. Oblicz obwód równoległoboku wiedząc, że w równoległobok ten można wpisać okrąg, a promień tego okręgu ma długość 2 (r).

285.** W trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) wpisano okrąg o środku S. Wykaż, że trójkąt ASD jest prostokątny.

286.*** Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległości 1 cm i 2 cm od końców ramienia pochyłego danego trapezu. Oblicz długości podstaw trapezu.

287.*** Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok jest równy $\frac{3}{2}r$. Wyznacz długości pozostałych boków trapezu.

288.*** Przekątna trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość d i tworzy z podstawami kąt α. Znajdź długość ramienia trapezu.

289.*** Oblicz długości boków trapezu równoramiennego znając jego obwód 20, długość przekątnej $\sqrt{41}$ oraz wiedząc, że w trapez ten można wpisać okrąg.

290.*** W kole o środku O poprowadzono dwie prostopadłe średnice AB i CD oraz cięciwę AM przecinającą średnicę CD w punkcie K. Oblicz miarę kąta BAM wiedząc, że w czworokąt $OBMK$ można wpisać okrąg.

291.*** Odcinki AB i KL przecinają się w punkcie S pod kątem prostym. Wykaż, że jeśli w czworokąt $AKBL$ można wpisać okrąg, to S jest środkiem co najmniej jednego z odcinków AB i KL.

257. $|\angle ASB| = 140^\circ$, $|\angle BSC| = 100^\circ$, $|\angle ASC| = 120^\circ$.

258. 50°, 60°, 70°.

259. $\frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

260. Podstawa: $2r\operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$. Ramię: $\frac{r\operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}$.

261. $2(2\sqrt{3}+3)$ $\left(\frac{r(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})(1+\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\right)$.

262. $r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})$.

263. $\frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$.

264. 3.

265. $\frac{2\sqrt{15}}{3} r$.

266. $\sqrt{3}-1$ $\left(\frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}\right)$.

267. 1.

268. 18 $(2(c+r))$.

269. $\frac{17}{3} r$.

270. $\sin\alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{4})$.

271. 2.

272. $|KL| = 7$, $|MN| = 10$.

273. 24 $\left(\frac{np}{2(n+1)}\right)$.

274. Sześć razy.

276. $\frac{1}{2} p \sin\frac{\alpha}{2}$.

277. $4c$.

278. 2 $\left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)$.

279. 15 i 5 $(c(1+\cos\alpha)$ i $c(1-\cos\alpha))$.

280. 5 i 30.

281. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ $\left(\frac{4}{\sin\alpha}\right)$.

282. $4r(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta})$.

283. $4d$.

284. 20 $(10r)$.

286. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ cm i $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.

287. $2r,\ 2\frac{1}{2}r,\ 3r$.

288. $d\cos\alpha$.

289. 2, 5, 5, 8.

290. $|\angle BAM| = 30^\circ$.

292. $(3+2\sqrt{2})d^2$.

293. 32 $(\frac{4P}{d})$.

294. 3 $(3(7-4\sqrt{3})a^2)$.

295. $\frac{a^2(m^2+n^2)}{(m+n)^2}$.

296. $a\sqrt{d^2-a^2}$.

297. $\frac{8}{25}$.

298. $3\sqrt{3}$.

299. 32 $(\frac{4r^2}{\sin\alpha})$.

300. 10 $(\frac{2\sqrt{d^4+4S^2}}{d})$.

301. 24 $(\frac{m^2-p^2}{4})$.

302. 384.

303. $\sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$.

304. $\frac{12}{37}a^2$.

305. $p^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

306. $\frac{1}{2}p^2\sin\alpha\cos\alpha$ $[=\frac{1}{4}p^2\sin 2\alpha]$.

307. 30.

308. 20.

309. 21.

310. $ab\sin\alpha$.

311. **a)** Tak; **b)** Tak; **c)** Nie.