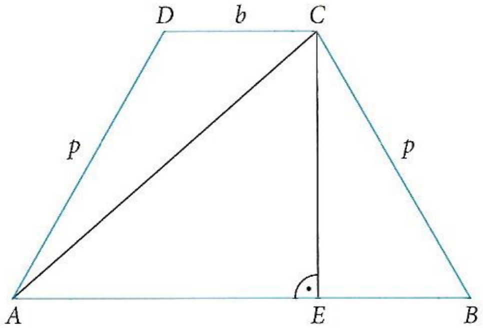
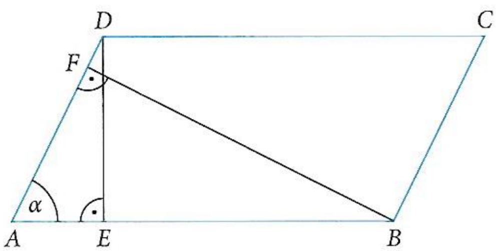
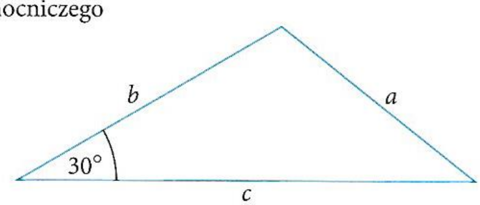
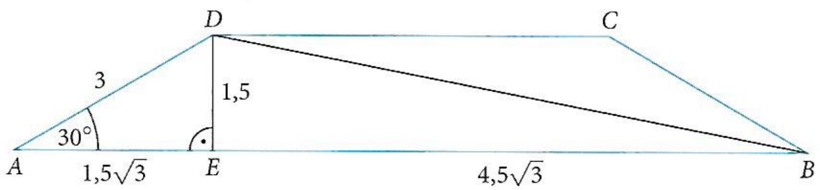
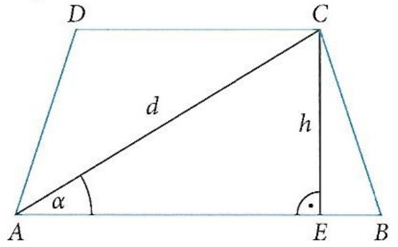
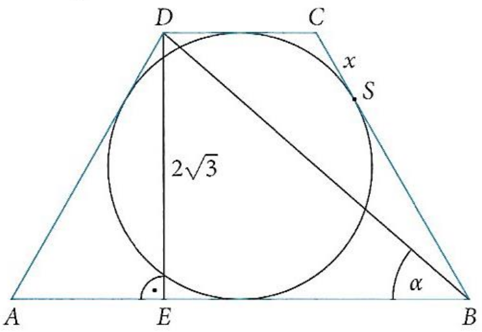
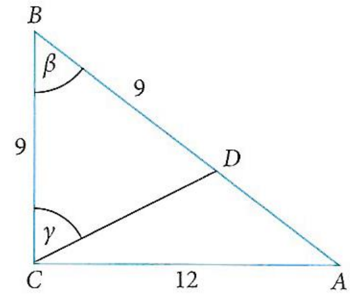
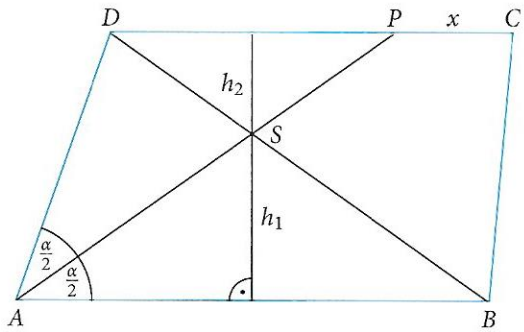
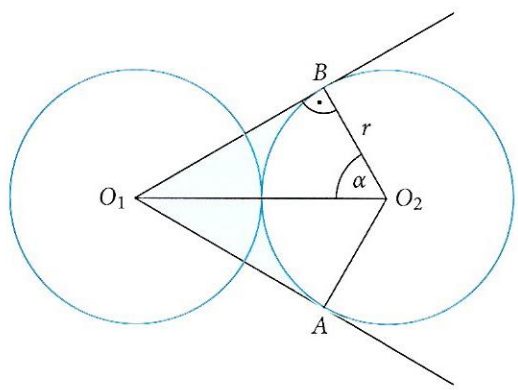
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

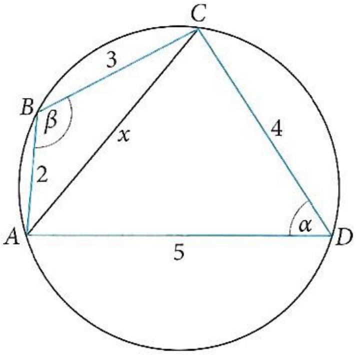
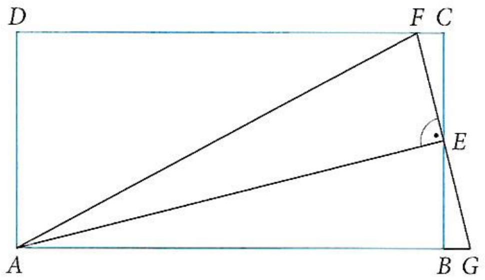
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykonanie rysunku pomocniczego oraz zapisanie zależności: $a + b = 2p$  $a = \|AB\|$ $b = \|CD\|$ $\|AD\| = \|CB\| = p$
	Obliczenie długości ramienia trapezu: $p = 4$ cm
	Zauważenie, że w trapezie równoramiennym $a + b = 2\|AE\|$, i wyznaczenie stąd $\|AE\| = 4$ cm
	Obliczenie długości odcinków CE i EB: $\|CE\| = 2\sqrt{3}$ cm, $\|EB\| = 2$ cm
	Obliczenie długości podstaw trapezu: $\|AB\| = 6$ cm, $\|DC\| = 2$ cm
2. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że trójkąty ADE i ABF są podobne, oraz zapisanie proporcji: $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{2,4}{4} = \frac{3}{5}$
	Obliczenie długości boków równoległoboku: $\|AB\| = 5$ cm, $\|AD\| = 3$ cm
2. b)	Obliczenie: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów długości przekątnej DB: $\|DB\| = 4$ cm
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów długości przekątnej AC: $\|AC\| = 2\sqrt{13}$ cm
	Obliczenie z twierdzenia cosinusów cosinusa kąta rozwartego γ między przekątnymi: $\cos\gamma = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$

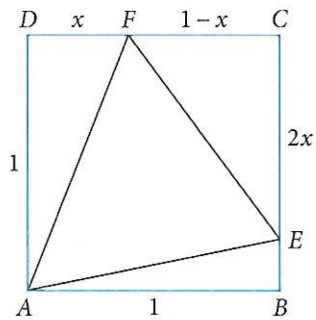
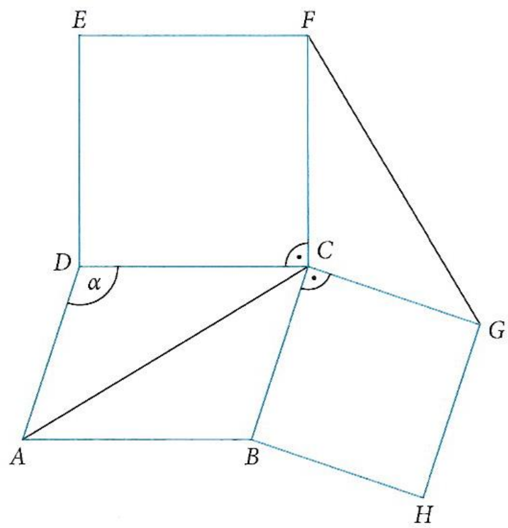
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
3.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Zapisanie twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin 30^\circ} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie, i obliczenie stąd długości boku a: $a = 2$ Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}bc\sin 30^\circ$ i zapisanie zależności: $bc = 4\sqrt{3}$ Skorzystanie z twierdzenia cosinusów i zapisanie zależności: $b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = 4$ Zapisanie układu równań: $\begin{cases} bc = 4\sqrt{3} \\ b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = 4 \end{cases}$ Podanie długości boków: $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$ lub $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$ i zauważenie, że jest to taki sam trójkąt Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2}r$ i obliczenie promienia okręgu wpisanego: $r = 2\sqrt{3} - 3$
4.	Zapisanie zależności: $a^2 = x^2(13 - 12\cos\alpha)$ na podstawie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC, gdzie $a = \|AC\|$ i $x = \|DB\|$ Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBC i zapisanie zależności: $a^2 = x^2(10 - 6\cos(180^\circ - \alpha)) = x^2(10 + 6\cos\alpha)$ Obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{1}{6}$ Odczytanie z tablic trygonometrycznych: $\alpha \approx 80^\circ$
5.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Obliczenie długości odcinka DB: $\|DB\| = 3\sqrt{7}$ Zauważenie, że promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABD Porównanie wzorów na pole trójkąta ABD: $P = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 1{,}5 = \frac{6\sqrt{3}\cdot 3\cdot 3\sqrt{7}}{4R}$ Wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trapezie: $R = 3\sqrt{7}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego  Zauważenie, że w trapezie równoramiennym $ABCD$: $\|AB\| + \|DC\| = 2\|AE\|$ Zapisanie pola trapezu w postaci: $P = \|AE\|h$ Wyznaczenie z trójkąta AEC: $h = d\sin\alpha$, $\|AE\| = d\cos\alpha$ Zapisanie pola trapezu w postaci: $P = \frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$
6. b)	Zapisanie obwodu w postaci: $Obw = 2(\|AB\| + \|DC\|)$ Wykorzystanie obliczeń z podpunktu a) i zapisanie: $Obw = 4\|AE\| = 4d\cos\alpha$
7.	Oznaczenie pól trójkątów: $P_{AMS} = x$ i $P_{ALS} = y$ oraz zauważenie, że $P_{BMS} = 2x$ i $P_{CLS} = 3y$ Obliczenie pola trójkąta AMC: $P_{AMC} = 220$ Obliczenie pola trójkąta ALB: $P_{ALB} = 165$ Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x + 4y = 220 \\ 3x + y = 165 \end{cases}$ Rozwiązanie układu równań: $x = 40$, $y = 45$ Obliczenie pól trójkątów: $P_{AMS} = 40$, $P_{BMS} = 80$, $P_{ALS} = 45$, $P_{CLS} = 135$
8. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego  Zapisanie długości podstaw: $\|AB\| = 6x$, $\|DC\| = 2x$ Wyznaczenie długości odcinków: $\|AE\| = 2x$, $\|EB\| = 4x$ Zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED: $4x^2 + 12 = 16x^2$ i obliczenie $x = 1$ Podanie długości ramienia: $\|AD\| = 4x = 4$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8. b)	Obliczenie długości przekątnej na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBD: $\lvert DB\rvert = 2\sqrt{7}$
9.	Obliczenie cosinusa kąta ABD: $\cos\lvert\sphericalangle ABD\rvert = \frac{2\sqrt{7}}{7}$
	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie długości odcinków AB i DA: $\lvert AB\rvert = 15$, $\lvert DA\rvert = 6$ 
	Obliczenie $\cos\beta$: $\cos\beta = \frac{3}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD i obliczenie długości CD: $\lvert CD\rvert = \frac{18\sqrt{5}}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD i obliczenie cosinusa kąta γ: $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$
	Obliczenie $\sin\beta$: $\sin\beta = \frac{4}{5}$
	Skorzystanie z twierdzenia sinusów dla trójkąta BCD i obliczenie promienia okręgu opisanego na tym trójkącie: $R = \frac{9\sqrt{5}}{4}$
	Obliczenie pola trójkąta BCD: $P = \frac{1}{2}\lvert BC\rvert\cdot\lvert BD\rvert\cdot\sin\beta = \frac{162}{5}$
	Skorzystanie ze wzoru na pole trójkąta BCD: $P = \frac{\lvert BC\rvert+\lvert BD\rvert+\lvert CD\rvert}{2}\cdot r$ i obliczenie promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt: $r = \frac{9}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)$
10.	Oznaczenie miar kątów $\lvert\sphericalangle BAC\rvert = \alpha$ i $\lvert\sphericalangle ABC\rvert = \beta$ oraz zauważenie, że $\lvert\sphericalangle CAD\rvert = 180^\circ - \alpha$ i $\lvert\sphericalangle CBE\rvert = 180^\circ - \beta$
	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle DCA\rvert = \frac{\alpha}{2}$, $\lvert\sphericalangle ECB\rvert = \frac{\beta}{2}$
	Obliczenie miary kąta $\gamma = \lvert\sphericalangle ECD\rvert$: $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 135^\circ$
	Wykorzystanie twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD: $\frac{\lvert ED\rvert}{\sin\gamma} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ECD
	Zauważenie, że $\lvert ED\rvert = 2p$ oraz $\sin\lvert\sphericalangle ECD\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Wyznaczenie długości promienia: $R = p\sqrt{2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Uzasadnienie, że $\lvert\sphericalangle APD\rvert = \frac{\alpha}{2}$, czyli trójkąt APD jest równoramienny i $\lvert DP\rvert = 6$ Zauważenie, że trójkąty ABS i PDS są podobne, więc: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{5}$ Zapisanie zależności $P_{ABCP} = 2P_{ABS}$ w postaci: $$\frac{10+x}{2}(h_1+h_2) = 10h_1$$ Obliczenie: $x = 2{,}5$ i $\lvert DC\rvert = 8{,}5$
12.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie, że $\lvert O_1O_2\rvert = 2r$, gdzie r jest promieniem kół  Obliczenie: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha = 60^\circ$ Obliczenie długości odcinka O_1B: $\lvert O_1B\rvert = \sqrt{3}r$ i pola czworokąta AO_1BO_2: $P_1 = \sqrt{3}r^2$ Wyznaczenie pola wycinka koła AO_2B: $P_2 = \frac{1}{3}\pi r^2$ Zapisanie pola zacieniowanej figury jako: $P = P_1 - P_2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}r^2$ Wyznaczenie pola koła: $S = \pi r^2 = \frac{3\pi P}{3\sqrt{3}-\pi}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń  Zauważenie, że skoro na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to $\beta = 180° - \alpha$ Skorzystanie z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ADC i ABC: $x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5\cos\alpha = 41 - 40\cos\alpha$ $x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\cos\beta = 13 - 12\cos\beta = 13 + 12\cos\alpha$ Wyznaczenie wartości $\cos\alpha$: $41 - 40\cos\alpha = 13 + 12\cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = \frac{7}{13}$ Wyznaczenie x: $x^2 = 41 - 40 \cdot \frac{7}{13} = \frac{253}{13}$, czyli $x = \sqrt{\frac{253}{13}}$
14.	Wykonanie rysunku (odcinki AB i EF przedłużamy do przecięcia w punkcie G)  Zauważenie, że trójkąty ECF i EBG są przystające ($\|CE\| = \|BE\|$, $\|\sphericalangle CEF\| = \|\sphericalangle BEG\|$ oraz oba trójkąty są prostokątne), zatem $\|EF\| = \|EG\|$ Zauważenie, że trójkąty AEF i AEG są przystające ($\|EF\| = \|EG\|$, oba trójkąty są prostokątne oraz AE jest ich wspólną przyprostokątną), zatem $\|\sphericalangle EAF\| = \|\sphericalangle EAB\|$
15.	Oznaczenie punktu przecięcia prostych ME i CD przez N Zauważenie, że trójkąty AME i DNE są podobne na podstawie cechy KKK, czyli $\frac{\|AM\|}{\|AE\|} = \frac{\|DN\|}{\|DE\|}$, oraz wyznaczenie $\|DN\| = \frac{2}{3}\|AM\|$ Zauważenie, że trójkąty MBP i NDP są podobne na podstawie cechy KKK, czyli $\frac{\|BP\|}{\|BM\|} = \frac{\|DP\|}{\|DN\|}$, oraz zapisanie $\|BP\| = \frac{4\|AM\| \cdot \|DP\|}{\|DN\|}$ Wykazanie, że $\|BP\| = 6\|DP\|$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego i podanie założenia: $x \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ 
	Zapisanie wzoru na pole trójkąta AEF: $$P = 1 - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{ADF}$$
	Wyznaczenie $P(x)$: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
	Wyznaczenie współrzędnej x_w wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{1}{4}$ i podanie odpowiedzi
17.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\vert AD\vert = \vert CG\vert$ oraz $\vert DC\vert = \vert CF\vert$
	Zauważenie, że $\vert\sphericalangle DCB\vert = 180^\circ - \alpha$ oraz $\vert\sphericalangle FCG\vert = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 180^\circ - \alpha) = \alpha$
	Zauważenie, że trójkąty ACD i CFG są przystające, więc $\vert AC\vert = \vert FG\vert$
18.	Obliczenie miar dwóch kątów wpisanych opartych na łukach $P_{11}P_{16}$ oraz P_1P_{22}: $$\vert\sphericalangle P_{16}P_1P_{11}\vert = 37{,}5^\circ,\ \vert\sphericalangle P_1P_{11}P_{22}\vert = 22{,}5^\circ$$
	Obliczenie miary kąta $P_{11}AP_{16}$: $\vert\sphericalangle P_{11}AP_{16}\vert = 180^\circ - (180^\circ - 22{,}5^\circ - 37{,}5^\circ) = 60^\circ$