MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

III.4.1–3. Uczeń posługuje się w obliczeniach pierwiastkami i stosuje prawa działań na pierwiastkach.[1]

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{36 \cdot 2}}{\sqrt{9 \cdot 3}} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \ \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \in \boldsymbol{NW}$$

Odpowiedź: D.

Zadanie 2. (1 pkt)

P3.1. Uczeń rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

$-1 \leq 2x - 3 < 3$
$1 \leq x < 3$
Odpowiedź: B.

Zadanie 3. (1 pkt)

P1.7. Uczeń oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Rzeczywista pojemność: 500 000 MB
Pojemność z etykiety (deklarowana): 500 GB
1 GB = 1024 MB, więc rzeczywista pojemność dysku w GB jest równa:

$$\frac{500\,000}{1024} = 488{,}28$$

Błąd względny:

$$\frac{|488{,}28 - 500|}{488{,}28} \cdot 100\% = 2{,}4\%$$

Odpowiedź: C.

Zadanie 4. (1 pkt)

P1.9. Uczeń wykonuje obliczenia procentowe.

Cena smartfonu: 800 zł
Pierwsza obniżka o 20%: 20% · 800 = 160 (zł)
Cena smartfonu po pierwszej obniżce: 640 (zł)
Druga obniżka: 20% · 640 = 128 (zł)
Obecna cena smartfonu: 512 (zł)
Odpowiedź: A.

Zadanie 5. (1 pkt)

P3.4. Uczeń korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań.
P3.7. Uczeń rozwiązuje równanie kwadratowe.

$x^3 - 6x + 8x = 0$
$x(x^2 - 6x + 8) = 0$
$x = 0, x = 2, x = 4$
Suma najmniejszego i największego rozwiązania: 0 + 4 = 4.
Odpowiedź: B.

---

1 Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego szkoły ponadgimnazjalnej.

Zadanie 6. (1 pkt)

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia.

$$\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3}{2}=\frac{14}{2}=7$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 7. (1 pkt)

P4.2. Uczeń oblicza wartości funkcji.

Miejsce zerowe funkcji $g(x)$: $x = -2$.
Wartość funkcji $f(x)$ dla $x = -2$:
$(-2)^2 + (-2) + m = 0$
$m = -2$
Odpowiedź: D.

Zadanie 8. (1 pkt)

III.7.6. Uczeń rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

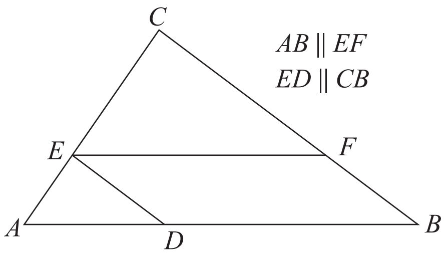
$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+x=2\\[2mm] \dfrac{x-y}{2}+y=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y+2x=4\\ x-y+2y=2\end{cases}\qquad \begin{cases}3x+y=4\\ x+y=2\end{cases}$$

Po odjęciu stronami $\begin{cases}3x+y=4\\ 2x=2\end{cases}$ $\begin{cases}3x+y=4\\ x=1\end{cases}$ $\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$

Odpowiedź: A.

Zadanie 9. (1 pkt)

P.7.3. Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.



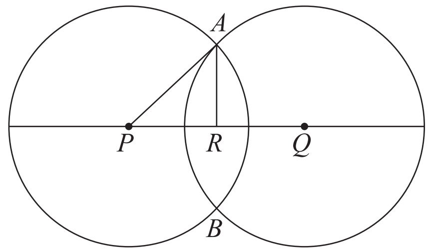
Trójkąty EFC, ADE i ABC są podobne (kkk).

$$\frac{P_{EFC}}{P_{ADE}}=\frac{12}{3}=4=k^2 \Rightarrow k=2$$

Zatem $|AB| = 3 = 3|AD|$ i trójkąty ABC i ADE są podobne w skali $k = 3$ i stąd pole trójkąta ABC jest $k^2 = 9$ razy większe niż pole trójkata ADE, czyli $P_{ABC} = 9 \cdot P_{ADE} = 9 \cdot 3 = 27$.
Odpowiedź: A.

Zadanie 10. (1 pkt)

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.
III.10.18. Uczeń rozpoznaje symetralną odcinka.



$|PA| = 10$, $|PR| = \dfrac{1}{2}|PQ| = 8$

Trójkąt PRA jest prostokątny (prosta AB jest symetralną PQ).
Z twierdzenia Pitagorasa $|AR| = 6$ i stąd $|AB| = 12$.
Odpowiedź: C.

Zadanie 11. (1 pkt)

P5.4. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Mamy:
$a \cdot aq \cdot aq^2 = 216$
$(aq)^3 = 216$
$aq = 6$
Stąd wymiary prostopadłościanu: $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ i suma długości krawędzi: $S = 104$.
Odpowiedź: D.

Zadanie 12. (1 pkt)

P10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

$\Omega = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}$; $\overline{\overline{\Omega}} = 90$

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 należących do Ω

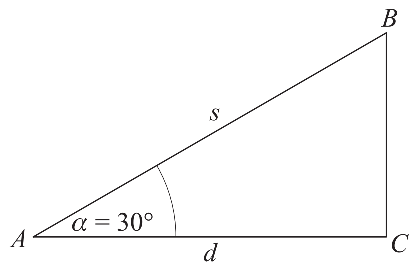
$A = \{12, 18, 24, \ldots, 96\}$; $\overline{\overline{A}} = 15$

$P(A) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Odpowiedź: D.

Zadanie 13. (2 pkt)

P.7.4. Uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych.
III.6.7. Uczeń wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.
III.1.7. Uczeń stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek.



Ze skali na mapie: 1 cm odpowiada 250 m.
Odległość rzeczywista „pozioma” między A i B: $d = 2000$ m.

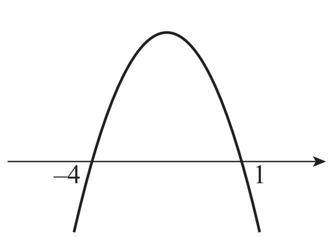
Zatem z własności trójkąta równobocznego lub funkcji trygonometrycznych (jeśli przyjmiemy $\sqrt{3} = 1,73$) w trójkącie prostokatnym $s = 2312$ m.

Stąd $V = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{V} \approx \frac{2,312 \text{ km}}{10 \text{ km/h}} = 0,2312 \text{ h} \approx 13,87 \text{ min} \approx 14 \text{ min}$

UWAGA: Uznajemy rozwiązania powstałe z przyjęcia innych przybliżeń!
Punktacja:
1 – wyznaczenie drogi s;
1 – obliczenie czasu podróży t i podanie wyniku w minutach.

Zadanie 14. (2 pkt)

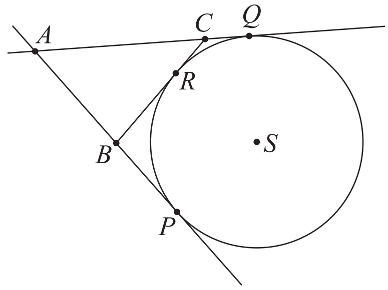
P2.1. Uczeń stosuje wzory skróconego mnożenia.
P3.5. Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe.



$(x - 1)^2 - x(x - 3) \geq (x + 2)^2 - 7$
$-x^2 - 3x + 4 \geq 0$
$x = 1, x = -4$
$x \in \langle -4, 1\rangle$
Punktacja:
1 – doprowadzenie nierówności do postaci $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$;
1 – rozwiązanie nierówności.

Zadanie 15. (2 pkt)

P.7.2. Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu.



Z własności stycznej do okręgu: $|AP| = |AQ| = a$ oraz $|BP| = |BR|$ i $|CR| = |CQ|$.
Stąd obwód trójkąta ABC jest równy:
$|AB| + |BR| + |CR| + |AC| = |AB| + |BP| + |CQ| + |AC| = |AP| + |AC| = 2a$.

Punktacja:

2 – przeprowadzenie pełnego uzasadnienia.

Zadanie 16. (4 pkt)

P5.1. Uczeń bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny i geometryczny.

P3.8. Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych.

Szukane liczby: a, b, c.

Z warunków zadania wynika: $\frac{a+b+c}{3} = 9$; $b - a = c - b$; $\frac{b}{a-1} = \frac{c+13}{b}$.

Ponadto $\frac{a+c}{2} = b \Rightarrow a + c = 2b$.

Stąd $\frac{a+b+c}{3} = 9 \Rightarrow \frac{3b}{3} = 9 \Rightarrow b = 9$

(można to też łatwo wywnioskować z własności ciągu arytmetycznego).

Do rozwiązania jest układ równań:

$$\begin{cases} 9 - a = c - 9 \\ \frac{9}{a-1} = \frac{c+13}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 18 \\ (a-1)\cdot(c+13) = 81 \end{cases}$$

$(a - 1)\cdot(31 - a) = 81$

$a^2 - 32a - 112 = 0$

$\Delta = 576$

$a = 4 \quad a = 28$

$c = 14 \quad c = -10$

Warunki zadania spełniają $a = 4$, $b = 9$, $c = 14$.

Punktacja:

1 – wyznaczenie b;

1 – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi;

1 – rozwiązanie równania kwadratowego;

1 – wybranie i zapisanie właściwego rozwiązania.

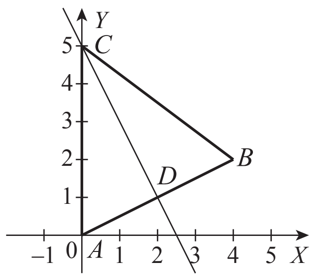
Zadanie 17. (4 pkt)

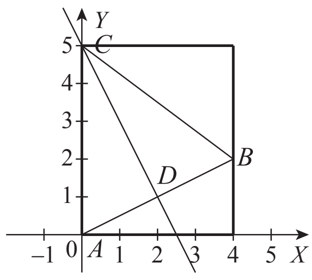
III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

III.10.9. Uczeń oblicza pole trójkąta.

P.8.5. Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

P.8.6. Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.





$A = (0, 0)$, $B = (4, 2)$

Punkt C leży na osi OY, zatem $C = (0, y)$.

Trójkąt jest równoramienny, więc D jest środkiem podstawy AB, stąd $D = (2, 1)$.

Odcinek CD jest wysokością prostopadłą do podstawy AB i trójkąt ADC jest prostokątny.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do wyznaczenia długości odcinków AD i DC, a następnie do trójkąta ADC, wyznaczymy wierzchołek C.

$|AD| = 5$, $|AC| = y$, $|CD|^2 = y^2 - 2y + 5$ i dalej $y = 5$.

Wierzchołek C ma współrzędne $(0, 5)$.

Pole trójkąta ABC (z wykorzystaniem poprzednich obliczeń):

$|AB| = 2\sqrt{5}$

$|CD| = \sqrt{y^2 - 2y + 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$P_{ABC} = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10$

(Pole łatwo obliczyć przez przyjęcie podstawy AC lub przez „dorysowanie" prostokąta i odpowiednią różnicę pól.)

Punktacja:

1 – sporządzenie rysunku, wyznaczenie współrzędnych punktu D;
1 – wyznaczenie $|AD|$ i $|CD|$;
1 – wyznaczenie współrzędnych punktu C;
1 – obliczenie pola trójkąta ABC.