

MATEMATYKA
Przed próbnią maturą. Sprawdzian 1. Poziom podstawowy.
Rozwiązania zadań.

Zadanie 1. Odpowiedź: D

$$\log_3 25 + \log_3 15 = 2 \log_3 5 + \log_3 3 + \log_3 5 = 3a + 1$$

Zadanie 2. Odpowiedź: B

Zadanie 3. Odpowiedź: B

$$3x + 2y - 4 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

$$\text{zatem } a = \frac{2}{3}$$

Zadanie 4. Odpowiedź: C

$$n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Zadanie 5. Odpowiedź: B

$$3x - 6 - 4x - 8 > 2$$

$$-x > 16$$

$$x < -16$$

Zatem jest to liczba (-17)

Zadanie 6. Odpowiedź: C

$$B / A = (3, 6)$$

Zadanie 7. Odpowiedź: C

$$x \neq 2 \text{ oraz } x^2 - 4 = 0. \text{ Zatem } x = 2 \text{ lub } x = -2$$

$$x = -2 \in D$$

Zadanie 8. Odpowiedź: A

$$b = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\text{zatem } a = b$$

Zadanie 9. Odpowiedź: A

$$\Delta = 13, x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{zatem } x_1 + x_2 = 3$$

Zadanie 10. Odpowiedź: D

$x - 1 = 0$ lub $x + 1 = 0$ lub $x^2 + 1 = 0$ lub $(x - 1)^2 = 0$
zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Uwaga. Pierwiastek 1 jest pierwiastkiem trzykrotnym.

Zadanie 11. Odpowiedź: C

$$\frac{1}{9} = a^{-2} \text{ zatem } a = 3$$

Zadanie 12. Odpowiedź: B

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ -6 = a + b \end{cases}$$

$$\text{Zatem } 9 = -3a$$

$$\text{czyli } a = -3$$

II sposób.

$$a = \frac{-6 - 3}{1 - (-2)} = -3.$$

Zadanie 13

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 1 oraz 2, z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{5}$.

$$\text{Wobec tego } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{czyli } \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{-5} = -\frac{7}{5}$$

II sposób.

$$\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} = \frac{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - 3 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{6 + 1}{1 - 6} = -\frac{7}{5}$$

Punktacja:

1 – wyznaczenie wartości $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$

1 – obliczenia końcowe

Zadanie 14

$$\Delta = 49 \text{ oraz } x_1 = 3, x_2 = -4$$

$$\text{Zatem } x \in \langle -4, 3 \rangle$$

Szukane liczby naturalne to $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

Punktacja:

1 – podanie rozwiązania nierówności kwadratowej, czyli $x \in \langle -4, 3 \rangle$

1 – wypisanie szukanych liczb naturalnych $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

Zadanie 15

$$(a + b)^2 - 2ab = 4ab$$

$$(a - b)^2 + 2ab = 4ab$$

$$\text{Zatem } (a + b)^2 = 6ab \text{ oraz } (a - b)^2 = 2ab$$

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

II sposób.

$$\text{Niech } x = \frac{a}{b}. \text{ Wtedy } x^2 + 1 = 4x.$$

$$\text{Po rozwiązaniu równania otrzymujemy: } x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Drugie rozwiązanie nie spełnia warunku $x > 1$.

Zatem

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Punktacja:

1 – wyznaczenie wartości $(a + b)^2$ lub $(a - b)^2$

1 – dokończenie dowodu

Zadanie 16.

$$\text{Z twierdzenia Pitagorasa } c = \sqrt{6}$$

$$R = \frac{1}{2}c, \text{ gdzie } c \text{ jest długością przeciwprostokątnej.}$$

$$\text{Zatem } R = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

zastosowanie wzoru na pole trójkąta $P = p \cdot r$, gdzie p oznacza połowę obwodu trójkąta.

$$\text{Zatem } \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot r$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

II sposób.

W oparciu o wzór, który jest w Zestawie Wybranych wzorów matematycznych

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

Punktacja:

1 – obliczenie $c = \sqrt{6}$

1 – wyznaczenie $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$

1 – zapisanie równania $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot r$

1 – podanie $r = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

Zadanie 17 $(3, y, x)$ – ciąg arytmetyczny $(3, y - 6, x)$ – ciąg geometryczny

$$\text{Zatem } \begin{cases} y - 3 = x - y \\ \frac{y - 6}{3} = \frac{x}{y - 6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ (y - 6)^2 = 3(2y - 3) \end{cases}$$

$$y^2 - 18y + 45 = 0$$

$$\Delta = 144, \quad y_1 = 15, \quad y_2 = 3$$

$$\begin{cases} x = 27 \\ y = 15 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$x = 27 \text{ lub } x = 3$$

Punktacja:

$$2 - \text{zapisanie układu równań } \begin{cases} y - 3 = x - y \\ \frac{y - 6}{3} = \frac{x}{y - 6} \end{cases}$$

1 – doprowadzenie do równania kwadratowego $y^2 - 18y + 45 = 0$ 1 – podanie odpowiedzi $x = 27$ oraz $x = 3$ **Uwaga.** W sytuacji, gdy uczeń odrzuci rozwiązanie $x = 3$, przyznajemy mu również maksymalną liczbę punktów.