MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P.1.9 Uczeń wykonuje obliczenia procentowe.

Oznaczmy: długości boków prostokąta: a, b, pole $P = ab$.
Długości boków prostokąta po zmianie: $1{,}2a$, $0{,}9b$. Pole $P = 1{,}08ab$.
Odpowiedź: D.

Zadanie 2. (1 pkt)

III.11.2. Uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.

Niech l oznacza tworzącą stożka, a r – promień podstawy.
Wtedy ze wzoru na pole powierzchni bocznej stożka i pole połowy koła otrzymujemy:

$\pi rl = \frac{1}{2}\pi l^2$, czyli $r = \frac{l}{2}$.

Ponadto $\frac{1}{2}\pi l^2 = 4\pi$, czyli $l = 2\sqrt{2}$. Stąd $r = \sqrt{2}$.

Pole podstawy $P_p = \pi r^2 = 2\pi$. Pole powierzchni całkowitej $P_c = 4\pi + 2\pi = 6\pi$.
Odpowiedź: A.

Zadanie 3. (1 pkt)

P.1.3. Uczeń posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Po wymnożeniu i przyrównaniu wyrażeń: $m = 3$.
Odpowiedź: B.

Zadanie 4. (1 pkt)

P10.1. Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

Niech x – wiek Jacka, y – wiek Placka. Wtedy

$\frac{x+y}{2} = x + 6$

$x + y = 2x + 12$

$y - x = 12.$

Odpowiedź: A.

Zadanie 5. (1 pkt)

P1.4. Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych.

$8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{4}$

Odpowiedź: B.

Zadanie 6. (1 pkt)

III.6.1. Uczeń opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami.

Jeśli $a + b = 20$, to $\frac{a+b}{2} = 10$.

Jeśli $ab = 64$, to $\sqrt{ab} = 8$.

Stąd: $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} + 2$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 7. (1 pkt)

P8.3. Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Z warunku prostopadłości prostych $a = -\frac{1}{3}$. Prosta g przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$, stąd $b = 2$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 8. (1 pkt)

P8.6. Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

$|AS| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$, czyli $|AB| = 2|AS| = 10$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 9. (1 pkt)

P5.3. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Liczba rozwiązywanych w poszczególnych tygodniach zadań tworzy ciąg arytmetyczny.
Mamy $a_1 = 4$, $r = 2$, $n = 25$.

Liczba rozwiązanych zadań $S = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n = \frac{8 + 24 \cdot 2}{2} 25 = 700$

Odpowiedź: A.

Zadanie 10. (1 pkt)

P7.2. Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

Niech r_1 i r_2 oznaczają promienie okręgów. Wtedy $r_2 = 2$ i $r_1 + r_2 = 12$. Stąd $r_1 = 10$.
Odpowiedź: C.

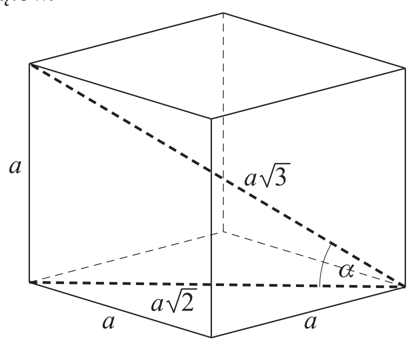
Zadanie 11. (1 pkt)

P9.2. Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.

Sporządzamy rysunek.

$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Odpowiedź: D.



Zadanie 12. (1 pkt)

P4.13. Uczeń szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

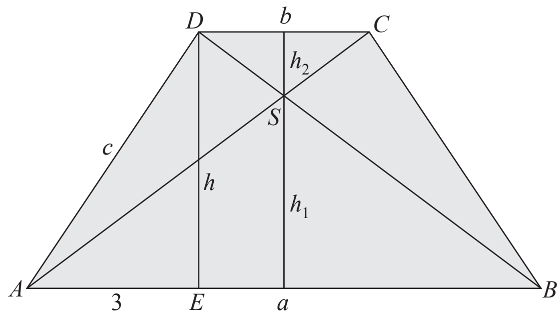
$pV = a$, gdzie a jest stałą. Stąd $V = \frac{a}{p}$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 13. (2 pkt)

P7.3. Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
$|AB| = 12$, $|CD| = 6$, $|AD| = |BC| = 5$.



Z trójkąta AED wyznaczamy $h = 4$. Mamy $h = h_1 + h_2$ i podobieństwo trójkątów ABS i CDS (cecha kkk) ze skalą $k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Zatem $h = h_1 + \frac{1}{2} h_1 = \frac{3}{2} h_1$. Ponieważ $h = 4$, to $h_1 = \frac{8}{3}$.

Pole trójkąta ABS jest równe $P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{8}{3} = 16$.

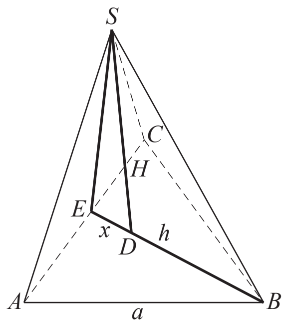
Punktacja:
1 – wyznaczenie h i skali podobieństwa trójkątów ABS i CDS;
1 – obliczenie pole trójkąta ABS.

Zadanie 14. (2 pkt)

P9.2. Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.

P9.3. Uczeń rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, więc $x = \frac{1}{3} h = \sqrt{3}$.

Trójkąt EDS jest prostokątny, a kąt $DES = \alpha$ jest kątem nachylenia ściany bocznej do podstawy.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{x}$

$H = x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$

Stąd $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{2}$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie wysokości H;
1 – obliczenie objętości ostrosłupa.

Zadanie 15. (2 pkt)

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ i $a^2 - b^2$.

Liczby a, b i c są długościami boków trójkąta, więc $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ oraz $a < b + c$ (nierówność trójkąta). Zatem $a^2 + b^2 + c^2 < (b + c)^2 + b^2 + c^2 < (b + c)^2 + b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 + (b + c)^2 = 2(b + c)^2$.

Punktacja:

1 – eliminacja wielkości a z nierówności;
1 – dowód nierówności.

Zadanie 16. (4 pkt)

III.7.7. Uczeń za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

P10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Niech x – liczba osób, które wybrały malarstwo, y – liczba osób, które wybrały fotografię. Wtedy

$\dfrac{x + y - 30}{30} = \dfrac{1}{3}$ – prawdopodobieństwo, że uczeń uczęszczał na oba zajęcia;

$\dfrac{30 - y}{30} = \dfrac{1}{6}$ – prawdopodobieństo, że uczeń uczęszczał tylko na zajęcia z malarstwa.

Stąd $y = 25$ i $x = 15$.

Odpowiedź: 15 osób wybrało zajęcia z malarstwa i 25 z fotografii.

Punktacja:

2 – po 1 pkt za ułożenie każdego z równań;
2 – rozwiązanie układu równań.

Zadanie 17. (4 pkt)

III.10.13. Uczeń rozpoznaje wielokąty przystające i podobne.

P4.11. Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

P4.12. Uczeń wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

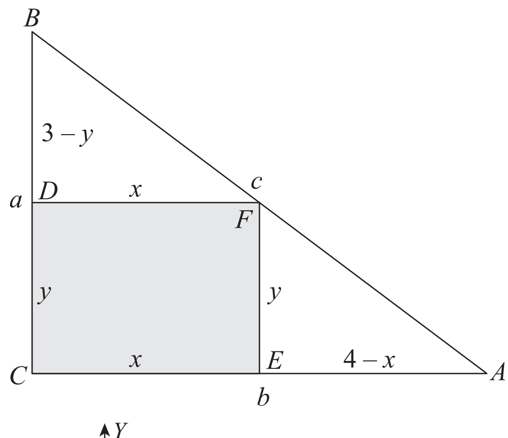
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
$x, y > 0$
Trójkąty AEF, FDB są podobne (cecha kkk).

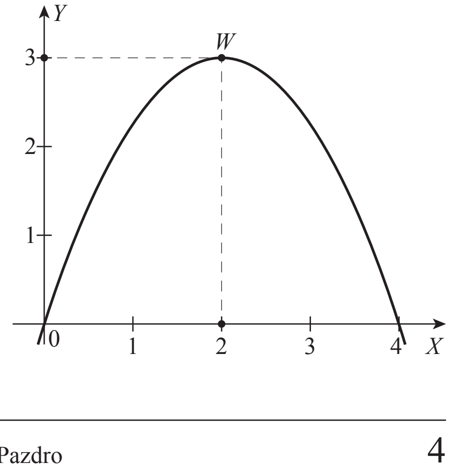
$\dfrac{3 - y}{x} = \dfrac{y}{4 - x}$, stąd $12 = 3x + 4y$ i $y = \dfrac{12 - 3x}{4}$.

Pole prostokąta $P = xy = x\dfrac{12 - 3x}{4} = \dfrac{-3x^2 + 12x}{4} = -\dfrac{3}{4}x^2 + 3x$.

Pole prostokąta będzie największe, jeśli funkcja $P(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 3x$ osiągnie wartość największą w przedziale $(0, 4)$. Wykresem funkcji jest parabola, a wartość największą osiąga w wierzchołku $W = (2, 3)$.

Wymiary prostokąta o największym polu: $x = 2$, $y = \dfrac{3}{2}$.





Punktacja:

2 – wykorzystanie podobieństwa trójkątów;
1 – zapisanie wzoru na pole prostokąta (z jedną niewiadomą);
1 – wyznaczenie wymiarów prostokąta o największym polu.