MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zapisujemy równość w postaci $(a - 2b)^2 + (2c - d)^2 = 0$.
Kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc każdy ze składników sumy musi być równy zero, czyli $a - 2b = 0$ i $2c - d = 0$.
Odpowiedź: D.

Zadanie 2. (1 pkt)

P1.6. Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Z definicji logarytmu otrzymujemy $a = -2$, $b = 2$ i $c = 0$.
Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (1 pkt)

P1.8. Uczeń posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

Ponieważ $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$, więc liczby całkowite z przedziału $\left\langle -\frac{100}{3}, \frac{100}{3} \right\rangle$ to
$-33, -32, ..., -1, 0, 1, ..., 32, 33$. Jest ich $2 \cdot 33 + 1 = 67$.
Odpowiedź: D.

Zadanie 4. (1 pkt)

P3.1. Uczeń sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności.

$$m = \frac{1 + \sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Odpowiedź: A.

Zadanie 5. (1 pkt)

III.7.7. Uczeń za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Niech x oznacza liczbę wykonanych w ciągu 3,5 h detali. Wtedy

$$\frac{x}{3{,}5} = \frac{150}{2{,}5}$$

$2{,}5x = 150 \cdot 3{,}5$
$x = 210$.
Odpowiedź: B.

Zadanie 6. (1 pkt)

P5.3. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy $a_n = -1 + 1{,}5(n - 1) = 1{,}5n - 2{,}5$.

Następnie rozwiązujemy nierówność $1{,}5n - 2{,}5 < 147$, skąd $n < 99\frac{2}{3}$.

Odpowiedź: B.

Zadanie 7. (1 pkt)

P4.1. Uczeń określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego.

Reszta z dzielenia 3 przez 6 wynosi 3, a reszta z dzielenia 10 przez 6 wynosi 4.

Zatem $f(3) = 3$ i $f(10) = 4$. Stąd $\frac{f(3)}{f(10)} = 0{,}75$.

Odpowiedź: D.

Zadanie 8. (1 pkt)

P4.3. Uczeń odczytuje z wykresu własności funkcji.

Największą wartość w przedziale $\langle -1; 2\rangle$ funkcja f przyjmuje dla argumentu $x = -1$ i wynosi ona 0.
Odpowiedź: C.

Zadanie 9. (1 pkt)

P6.3. Uczeń oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).

Ponieważ $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, więc $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Stąd $\alpha = 60°$, gdyż $0° < \alpha < 90°$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 10. (1 pkt)

P9.5. Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.

Czworokąt $ABGH$ jest prostokątem, w którym $|AB| = 1$ i $|BG| = \sqrt{2}$ (BG jest przekątną kwadratu o boku 1). Zatem pole prostokąta $ABGH$ jest równe $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Odpowiedź: B.

Zadanie 11. (1 pkt)

P8.6. Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

P8.7. Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Wyznaczamy $B = (6, -8)$.
Korzystamy ze wzoru na odległość pomiędzy dwoma punktami

$|AB| = \sqrt{\left(6 - (-6)\right)^2 + (-8 - 8)^2} = 20$

Odpowiedź: D.

Zadanie 12. (1 pkt)

P10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

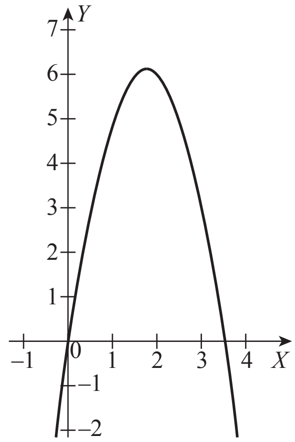
Obliczamy liczbę wszystkich kul w urnie: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
Obliczamy liczbę kul o numerach parzystych: $2 + 4 = 6$.

Wyznaczamy prawdopodobieństwo wylosowania kuli o numerze parzystym $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź: D.

Zadanie 13. (2 pkt)

P3.5. Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.



Zapisujemy nierówność $(x-2)(3-2x) > -6$.
Przekształcamy ją do postaci równoważnej $-2x^2 + 7x > 0$.

Zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynu $-2x\left(x-\frac{7}{2}\right) > 0$.

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y = -2x\left(x-\frac{7}{2}\right)$.

Odczytujemy z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $0 < x < 3\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $0 < x < 3\frac{1}{2}$.

Punktacja:
1 – zapisanie nierówności i wyznaczenie pierwiastków trójmianu;
1 – naszkicowanie wykresu trójmianu i podanie zbioru rozwiązań nierówności.

Zadanie 14. (2 pkt)

P7.4. Uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Oznaczmy $|BC| = a$ i $|AC| = b$.

Z definicji funkcji tangens $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, więc $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

Skąd $a = \frac{2}{3}b$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie:

$a^2 + b^2 = \left(3\sqrt{13}\right)^2$

$\frac{4}{9}b^2 + b^2 = 117$

$\frac{13}{9}b^2 = 117$

$b^2 = 81$.

Stąd $b = 9$ oraz $a = \frac{2}{3}\cdot 9 = 6$.

Zatem obwód tego trójkąta jest równy $6 + 9 + 3\sqrt{13} = 15 + 3\sqrt{13}$.

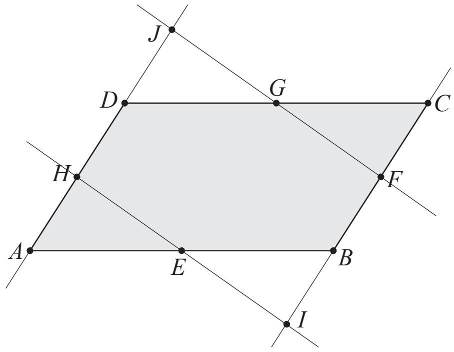
Odpowiedź: $15 + 3\sqrt{13}$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie zależności a od b lub b od a;
1 – wyznaczenie obwodu trójkąta.

Zadanie 15. (2 pkt)

III.10.1. Uczeń korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe.

III.10.14. Uczeń stosuje cechy przystawania trójkątów.



Sporządzamy rysunek.
Zauważmy, że $|AE| = |BE|$, $\sphericalangle AEH = \sphericalangle BEI$ (kąty wierzchołkowe) i $\sphericalangle EAH = \sphericalangle EBI$ (katy naprzemianległe). Zatem trójkąt AEH przystaje do trójkata BEI (cecha kbk). Podobnie trójkąty CGF i DGJ są przystające.
Stąd $P_{ABCD} = P_{EBFGDH} + P_{AEH} + P_{CGF} = P_{EBFGDH} + P_{BEI} + P_{GDJ} = P_{HIFJ}$.

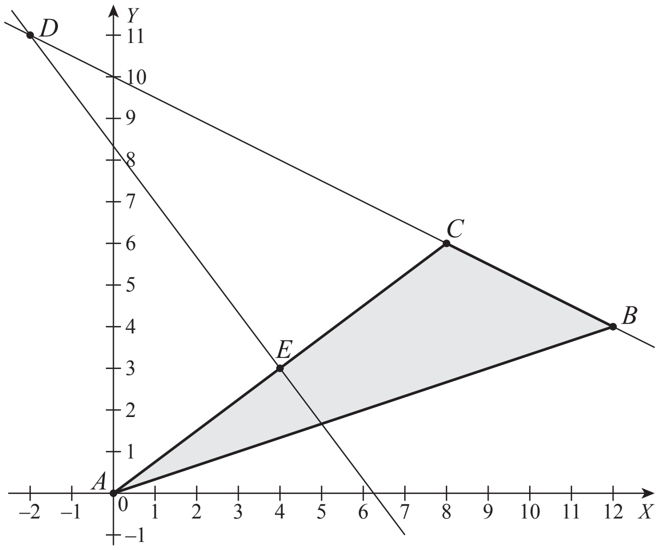
Punktacja:
1 – uzasadnienie przystawania trójkątów AEH i BEI lub trójkatów CGF i DGJ;
1 – uzasadnienie równości pól równoległoboku $ABCD$ i czworokąta $HIFJ$.

Zadanie 16. (4 pkt)

P8.3. Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

P8.5. Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka.

Sporządzamy rysunek:



Wyznaczamy równanie prostej AC: $y = \frac{3}{4}x$.

Wyznaczamy środek odcinka AC: $E = (4, 3)$.
Symetralna odcinka AC jest prostopadła do prostej AC. Zatem $y = -\frac{4}{3}x + b$.

Ponadto do symetralnej należy punkt E, więc
$-\frac{4}{3} \cdot 4 + b = 3$, czyli $b = \frac{25}{3}$.

Zatem symetralna odcinaka AC ma równanie
$y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.

Wyznaczamy równanie prostej BC: $y = -\frac{1}{2}x + 10$.

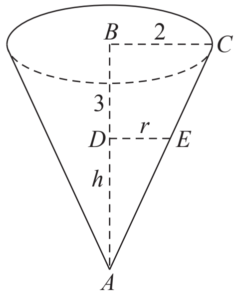
Wyznaczamy punkt przecięcia symetralnej z prostą BC:
$-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} = -\frac{1}{2}x + 10$.

Skąd $x = -2$. Aby obliczyć y, podstawiamy $y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 10 = 11$. Zatem $D = (-2, 11)$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie równania prostej BC;
1 – wyznaczenie równania prostej AC;
1 – wyznaczenie równania symetralnej odcinka AC;
1 – wyznaczenie punktu przecięcia się odpowiednich prostych.

Zadanie 17. (4 pkt)

III.11.2. Uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).



Obliczamy objętość stożka dużego $V = 4\pi$.
Niech h oznacza, na jaką wysokość należy nalać wodę, a r – promień.
Ponieważ kąty ABC i ADE są proste oraz kąty BAC i DAE mają tę samą miarę, więc trójkąty ABC i ADE są podobne (cecha kkk). Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy $\frac{r}{h} = \frac{2}{3}$, czyli $r = \frac{2}{3}h$.

Obliczamy objętość stożka wypełnionego wodą:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{27}\pi h^3.$$

Obliczamy, do jakiej wysokości ma zostać nalana woda:

$$\frac{4}{27}\pi h^3 = \frac{1}{8} \cdot 4\pi.$$

$$h^3 = \frac{27}{8}$$

$$h = \frac{3}{2}.$$

Odpowiedź: Należy napełnić rożek do wysokości 1,5 dm.

Punktacja:

1 – uzasadnienie podobieństwa trójkątów ABC i ADE;
1 – wyznaczenie zależności pomiędzy r a h;
1 – ułożenie równania na h;
1 – wyznaczenie h.