MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P1.1. Uczeń przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach.[1]

$0,(2) < \dfrac{1}{\sqrt{2\frac{1}{4}}}$, czyli $\dfrac{2}{9} < \dfrac{2}{3}$

Odpowiedź: B.

Zadanie 2. (1 pkt)

P3.1. Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

$0 \leq x^2 < 4x - 3$

Zauważmy, że warunek $0 \leq x^2$ jest spełniony dla każdej liczby rzeczywistej.

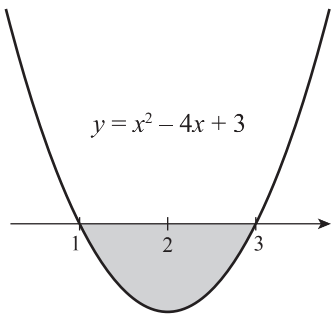
Wystarczy rozwiązać nierówność

$x^2 < 4x - 3$

$x^2 - 4x + 3 < 0$

$\Delta = 4$

$x = 1$ lub $x = 3$



Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (1 pkt)

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia.

$$\frac{a-1}{a+1} + \frac{a+1}{a-1} = \frac{(a-1)^2 + (a+1)^2}{a^2 - 1} = \frac{2a^2 + 2}{a^2 - 1} = \frac{2\sqrt{5}^2 + 2}{\sqrt{5}^2 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

Odpowiedź: A.

Zadanie 4. (1 pkt)

P1.9. Uczeń wykonuje obliczenia procentowe.

Trasa do przebycia: 65% – 299 km

Cała trasa: 100% – x km

Stąd $x = 460$ km.

Odpowiedź: A.

Zadanie 5. (1 pkt)

P3.4. Uczeń korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań.

P3.7. Uczeń rozwiązuje równanie kwadratowe.

$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x^2 - 5x + 6)}{x - 3} = 0$$

Założenie: $x \neq 3$

$(x-1)^2 \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$

$x = 1$ lub $x = 2$ lub $x = 3$ $(\Delta = 1)$

Największym rozwiązaniem równania jest liczba 2 (bo liczba 3 została wcześniej wykluczona).

Odpowiedź: C.

[1] Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego szkoły ponadgimnazjalnej.

Zadanie 6. (1 pkt)

P4.2. Uczeń oblicza wartości funkcji.

P4.6. Uczeń wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji.

Z treści zadania:

$f(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 5$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b = 0$

Rozwiązując układ równań, otrzymamy:

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x + 3$

Po podstawieniu do zależności $\frac{f(-3) + f(3)}{f(0)} = \frac{-3 + 9}{3} = 2.$

Odpowiedź: A.

Zadanie 7. (1 pkt)

P4.11. Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Wyznaczamy wartości na końcach przedziału $\langle 2, 5 \rangle$ i w wierzchołku paraboli.

$f(2) = 8$

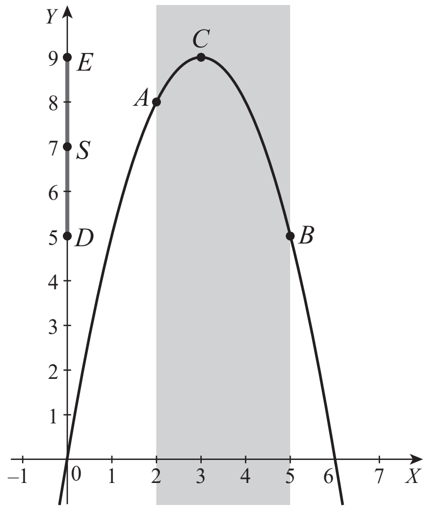
$f(3) = 9$

$f(5) = 5$

Określamy zbiór wartości, czyli przedział $\langle a, b \rangle = \langle 5, 9 \rangle$.

Środkiem tego przedziału jest 7.

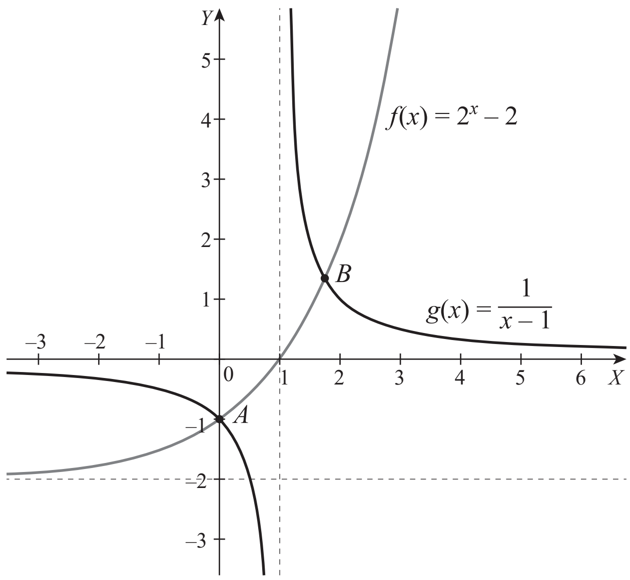
Odpowiedź: D.



Zadanie 8. (1 pkt)

P4.4. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ uczeń szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$.

P4.13. i P4.14. Uczeń szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i wykres funkcji wykładniczej.



Odpowiedź: C.

Zadanie 9. (1 pkt)

P5.3. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$2150 = \frac{2a_1 + (10-1)(-30)}{2} \cdot 10$$

$2150 = (2a_1 - 270) \cdot 5$
$430 = 2a_1 - 270$
$2a_1 = 700$
$a_1 = 350$

Odpowiedź: C.

Zadanie 10. (1 pkt)

P5.2. Uczeń bada, czy dany ciąg jest geometryczny.

Korzystamy z definicji lub zależności dla ciągu geometrycznego.

$$x^2 = \left(\sqrt{5} - 2\right)\frac{\sqrt{5} + 2}{4}$$

$$4x^2 = \left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

$4x^2 = 5 - 4$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo $x > 0$.

Odpowiedź: B.

Zadanie 11. (1 pkt)

P6.1. Uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych.

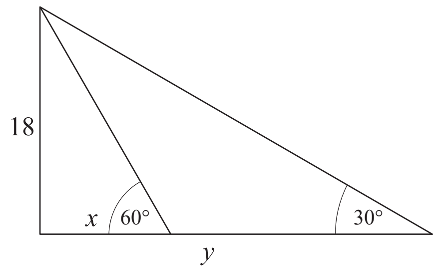
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 6\sqrt{3} \approx 10$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{18}{y} \Rightarrow y = 18\sqrt{3} \approx 31$$

$y - x \approx 21$

Cień rzucany zimą jest dłuższy o około 21 m.

Odpowiedź: C.



Zadanie 12. (1 pkt)

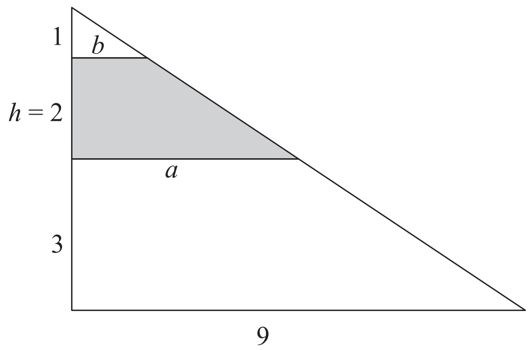
P7.3. Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Korzystamy z podobieństwa trójkątów (cecha kkk).

Mamy: $\frac{1}{b} = \frac{3}{a} = \frac{6}{9}$ i stąd $\begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$.

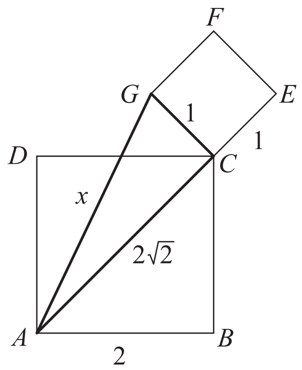
Pole figury (trapezu) $P = \frac{a+b}{2}h = \frac{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}}{2} \cdot 2 = \frac{6}{2} \cdot 2 = 6$

Odpowiedź: D.



Zadanie 13. (2 pkt)

III.10.7 Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.



Zauważmy, że trójkąt ACG jest prostokątny, bo A, C, E leżą na jednej prostej i odcinek CG jest prostopadły do odcinka CE (kwadrat $CEFG$).
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka AG.

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = x^2$

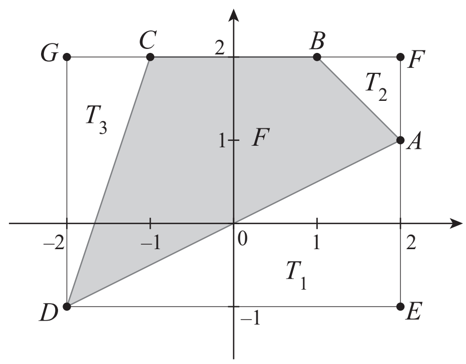
$8 + 1 = x^2$
$3 = x$
c.n.d.

Punktacja:
2 – przeprowadzenie pełnego uzasadnienia.

Zadanie 14. (2 pkt)

P8.7. Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowe względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

III.10.9. Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.



Obliczamy pola: prostokąta $DEFG$ (12), i trójkątów T_1, T_2, T_3 (odpowiednio: 4, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$).
Pole figury F jest równe różnicy pól prostokąta i trójkątów T_1, T_2, T_3, czyli 6.

Punktacja:
1 – wykonanie rysunku, wyznaczenie punktów C i D;
1 – obliczenie pola figury F.

Zadanie 15. (2 pkt)

III.7.1. Uczeń zapisuje związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi.

x – cena tańszej pamięci USB
y – liczba zakupionych tańszych pamięci USB
Z warunków zadania:

$xy = (x + 20)\frac{y}{3}$

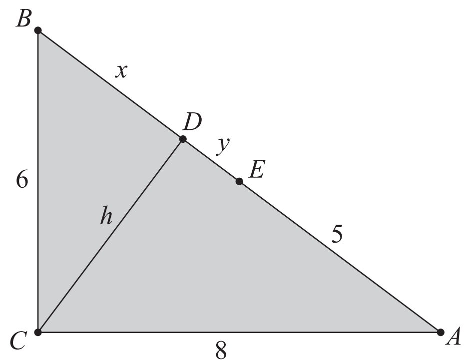
$3xy = xy + 20y$
$2xy = 20y$
$x = 10$
Cena tańszej pamięci USB to 10 zł.

Punktacja:
1 – ułożenie zależności na koszt zakupu tańszej i droższej pamięci USB;
1 – obliczenie ceny tańszej pamięci USB.

Zadanie 16. (4 pkt)

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

III.10.9. Uczeń oblicza pola trójkątów.



Obliczamy wysokość h (z porównania pól).

$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{10 \cdot h}{2}$

$h = \frac{24}{5}$

Trójkąt *CDB* jest prostokątny. Wyznaczamy długość odcinka *x*.

$$x^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = 6^2$$

$$x = \frac{18}{5}$$

Długość odcinka *y*:

$x + y = 5$

$$y = 5 - \frac{18}{5}$$

$$y = \frac{7}{5}$$

Długość odcinka *DE* jest równa $\frac{7}{5}$.

Punktacja:

1 – wyznaczenie *h*;
1 – zastosowanie twierdzenie Pitagorasa do trójkąta *CDB*;
1 – wyznaczenie *x*;
1 – wyznaczenie długości odcinka *DE*.

Zadanie 17. (4 pkt)

P5.3. Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

P4.12. Uczeń wykorzystuje własności funkcji kwadratowej.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Z warunków zadania:

$a + b + c = -15$
$a + a + r + a + 2r = -15$
$3a + 3r = -15$
$a + r = -5$
$b = -5$

(1) (a, b, c) – ciąg arytmetyczny

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$-5 = \frac{a + c}{2}$$

$a + c = -10$

(2) $x = 4$ – miejsce zerowe

$f(4) = 16a - 20 + c = 0$
$16a + c = 20$

Z **(1)** i **(2)** wynika:

$$\begin{cases} a + c = -10 \\ 16a + c = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ c = -12 \end{cases}$$

Szukane liczby to: $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$.

Punktacja:

1 – zapisanie warunków wynikających z treści zadania np. $a + b + c = -15$ i $f(4) = 0$;
1 – wyznaczenie *b*;
1 – zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć *a* i *c*;
1 – obliczenie wartości *a*, *b* i *c*.