MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P1.9. Uczeń wykonuje obliczenia procentowe[1].

Jeśli prostopadłościan ma boki długości a, b i c, to po zmianie otrzymujemy długości $1{,}1a$, $0{,}9b$ i d. Aby objętości obu prostopadłościanów były równe, musi zachodzi równość $0{,}99abd = abc$, czyli $d = \frac{100}{99}c$. Zatem długość trzeciego boku musimy zwiększyć o $\frac{1}{99} = 1{,}(01)\%$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 2. (1 pkt)

P1.4. Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

P1.6. Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu.

A. $(-2)^{100} > 0$ i $(-2)^{11} < 0$; B. $9^{10} = 3^{20} > 3^{18}$; C. $\log_2 0{,}25 = -2$ i $\log_{0{,}25} 2 = -0{,}5$; D. $\log_{0{,}5} 2 = -1$ i $\log_2 0{,}5 = -1$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (1 pkt)

P3.5. Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązaniem nierówności jest x spełniające nierówności $-\sqrt{10} < x < \sqrt{5}$. Liczby całkowite spełniające ten warunek to $-3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Odpowiedź: B.

Zadanie 4. (1 pkt)

P5.4. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Korzystając ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego, otrzymujemy $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$, czyli $a_4 = 4 \cdot (-2)^3 = -32$.

Odpowiedź: A.

Zadanie 5. (1 pkt)

P8.6. Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

Obliczamy długości boków:

$|AB| = 3 - 1 = 2$, $|AC| = 3 - 2 = 1$, $|BC| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$

Zatem obwód jest równy $3 + \sqrt{5}$.

Odpowiedź: A.

Zadanie 6. (1 pkt)

P8.2. Uczeń bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

P3.6. Uczeń korzysta z pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$.

[1] Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego szkoły ponadgimnazjalnej.

Z warunku na równoległość prostych otrzymujemy

$m^2 = \frac{-8}{m}$, gdzie $m \neq 0$

$m^3 = -8$

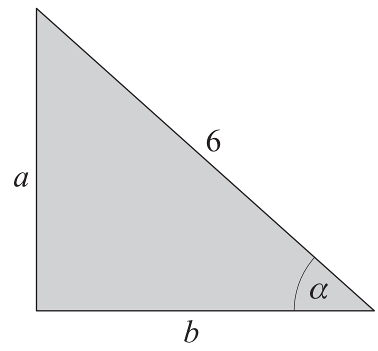
$m = -2$

Odpowiedź: B.

Zadanie 7. (1 pkt)

P7.4. Uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych.

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku. Wtedy



$\sin\alpha = \frac{2}{3}$

$\frac{a}{6} = \frac{2}{3}$

$a = 4$

Z twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$, czyli $b = 2\sqrt{5}$.

$P = \frac{ab}{2} = 4\sqrt{5}$

Odpowiedź: C.

Zadanie 8. (1 pkt)

III.1.7. Uczeń stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym.

W ciągu jednej godziny pierwsza krawcowa wykona $\frac{1}{20}$ całego zlecenia. Natomiast druga krawcowa podczas godziny wykona $\frac{1}{30}$ całego zlecenia. Zatem obie razem w ciągu godziny wykonają $\frac{1}{20}+\frac{1}{30} = \frac{1}{12}$ całego zlecenia. Wykonanie całej pracy zajmie im 12 godzin.

Odpowiedź: C.

Zadanie 9. (1 pkt)

P10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Liczby dwucyfrowe to liczby od 10 do 99, jest ich 90. Liczb podzielne przez 5 to 10, 15, ..., 95, jest ich 18. Szukane prawdopodobieństwo to $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

Odpowiedź: D.

Zadanie 10. (1 pkt)

P4.4. Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$.

Miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + 4$ jest $x = -2$. Zatem miejscem zerowym funkcji $y = f(x + 2)$ będzie $x = -2 - 2 = -4$ (przesuwamy wykres o dwie jednostki w lewo).

Odpowiedź: A.

Zadanie 11. (1 pkt)

P8.7. Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Obrazem środka odcinka *AB* w symetrii względem początku układu współrzędnych będzie środek odcinka *CD*. Środkiem odcinka *AB* jest punkt $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (1, 2)$. Jego obrazem w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt $(-1, -2)$.
Odpowiedź: C.

Zadanie 12. (1 pkt)

P7.1. Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Kąt *AOB* jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany *ACB*, czyli kąt *AOB* ma 160°. Trójkąt *ABO* jest równoramienny, czyli kąty *ABO* i *BAO* mają taką samą miarę. Suma kątów w trójkącie jest równa 180°, więc kąt *ABO* ma miarę $(180° - 160°) : 2 = 10°$.
Odpowiedź: A.

Zadanie 13. (2 pkt)

P5.3. Uczeń stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

P3.3. Uczeń rozwiązuje równanie kwadratowe z jedną niewiadomą.

Niech *k* oznacza liczbę odcinków, z których składa się spirala. Wtedy z warunków zadania układamy równanie:
$3 + 7 + 9 + ... + (2k + 1) = 143$, gdzie $k \geq 1$

$$\frac{3+2k+1}{2}k = 143$$

$$\frac{2(k+2)}{2}k = 143$$

$k^2 + 2k - 143 = 0$
$k_1 = -13$ (sprzeczność z założeniem) lub $k_2 = 11$
Odpowiedź: Spirala musi składać się z 11 odcinków.

Punktacja:
1 – ułożenie równania i zastosowanie wzoru na sumę ciągu arytmetycznego;
1 – rozwiązanie równania i podanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 14. (2 pkt)

P 2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$.

Poniższą nierówność przekształcamy w sposób równoważny.
$(a^2 - b^2)^2 \geq 0$
$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0$
$a^4 + b^4 \geq 2(ab)^2 > 2 \cdot 2^2 = 8$

Punktacja:
1 – wyprowadzenie nierówności $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$;
1 – uzasadnienie, że $a^4 + b^4 > 8$.

Zadanie 15. (2 pkt)

P4.10. Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-2(k-1)}{-2} = k - 1$$

$y_w = f(k-1) = -(k-1)^2 + 2(k-1)^2 - k^2 + 2k = 1$
Współczynnik $a = -1$, więc ramiona paraboli skierowane są do dołu. Zbiorem wartości jest więc przedział $(-\infty, y_w\rangle = (-\infty, 1\rangle$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli;
1 – uzasadnienie, że zbiorem wartości jest $(-\infty, 1\rangle$.

Zadanie 16. (4 pkt)

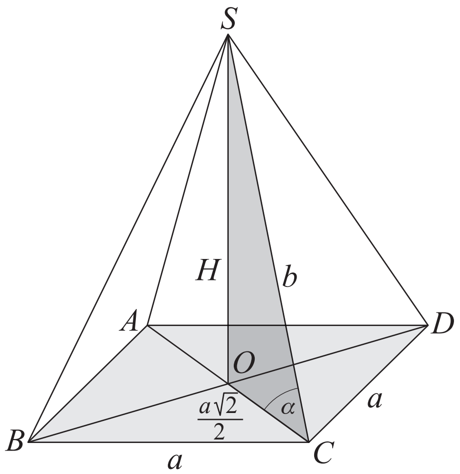
P9.6. Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku.
Rozważmy trójkąt prostokątny *COS*.

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$b = 2a$
Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa wynosi 48, więc
$4a + 4b = 48$
$a + b = 12$
Podstawiając $b = 2a$, otrzymujemy $3a = 12$, czyli $a = 4$ i $b = 8$.
Z twierdzenia Pitagorasa: $H^2 = 64 - 8 = 56$, więc $H = 2\sqrt{14}$.
Obliczamy objętość: $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{32\sqrt{14}}{3}$.



Punktacja:
1 – wyznaczenie zależności $b = 2a$;
1 – wyznaczenie wartości a i b;
1 – wyznaczenie H;
1 – obliczenie objętości.

Zadanie 17. (4 pkt)

P4.11 Uczeń wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

P4.12 Uczeń wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp.

Oznaczmy przez a i b ($a > 0$ i $b > 0$) długości poszukiwanych krawędzi prostopadłościanu.
Z warunków zadania:
$12 + 4a + 4b = 56$
$b = 11 - a \qquad (a < 11)$
Wyznaczamy wzór na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:
$P(a) = 6a + 2a(11 - a) + 6(11 - a) = -2a^2 + 22a + 66$.
Współczynnik przy a^2 jest ujemny oraz współrzędna $a = 5{,}5$ wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle 0; 11\rangle$, więc wartość największa funkcji P jest osiągana właśnie w tym punkcie.
Wówczas $b = 11 - 5{,}5 = 5{,}5$.

Punktacja:
1 punkt – wyznaczenie zależności pomiędzy a i b;
1 punkt – wyznaczenie wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu;
1 punkt – uzasadnienie, że wartość największa osiągana jest w wierzchołku paraboli;
1 punkt – podanie wartości a i b.