MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

III.1.5. Uczeń oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne[1].

$\dfrac{0,5+\frac{7}{4}:\frac{7}{8}}{0,75-1\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = -2$. Suma liczb przeciwnej i odwrotnej $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 2. (1 pkt)

P1.3. Uczeń posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

$$\left(\frac{\sqrt{54}-\sqrt{24}}{\sqrt{27}-\sqrt{12}}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 3. (1 pkt)

P1.4. Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

P1.6. Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu.

$$A = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}^2}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},\ B = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = 3$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 4. (1 pkt)

P1.9. Uczeń wykonuje obliczenia procentowe.

x – masa świeżych owoców
35% – 2 kg
100% – x kg
Zatem $x \approx 5,7$ kg
Odpowiedź: D.

Zadanie 5. (1 pkt)

P3.3. Uczeń rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

$2(3x-2) \geq -2x+3-3$
$6x-4 \geq -2x$
$8x \geq 4$
$x \geq \frac{1}{2}$

Odpowiedź: A.

---

[1] Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego szkoły ponadgimnazjalnej.

Zadanie 6. (1 pkt)

P4.2. Uczeń oblicza wartości funkcji.

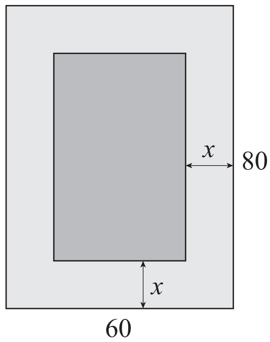
$$f(x) = \frac{x^2 - 7}{x}$$

$$f\left(\sqrt{3} + 2\right) = \frac{\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 - 7}{\sqrt{3} + 2} = \frac{3 + 4\sqrt{3} + 4 - 7}{\sqrt{3} + 2} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = \frac{12 - 8\sqrt{3}}{-1} = 8\sqrt{3} - 12$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 7. (1 pkt)

P3.4. Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.



x – szerokość ramki

Założenie: $0 < x < 30$

$(60 - 2x)(80 - 2x) = 3264$

$4x^2 - 280x + 1536 = 0$

$x^2 - 70x + 384 = 0$

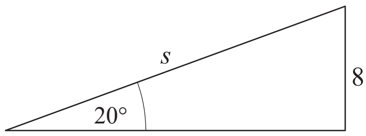
$\Delta = 3364$, $\sqrt{\Delta} = 58$

$x = 6$ lub $x = 64$

Odpowiedź: C.

Zadanie 8. (1 pkt)

P6.1. i P6.2. Uczeń wykorzystuje definicje funkcji trygonometrycznych i korzysta z ich przybliżonych wartości.



$$\sin 20^\circ = \frac{8}{s}$$

$$s = \frac{8}{\sin 20^\circ} = \frac{8}{0,342} = 23,4 \quad (\text{m})$$

$$V = 2,8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{23,4}{2,8} = 8,36 \ \ (\text{s})$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 9. (1 pkt)

P1.7. Uczeń oblicza błąd bezwzględny i błąd względny.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{12}{0,25} = 48(\Omega)$$

Błąd względny $\left|\frac{50 - 48}{50} \cdot 100\right| = 4\%$

Odpowiedź: A.

Zadanie 10. (1 pkt)

P 5.4. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego.

Założenie: ciąg rosnący, więc $q > 0$.

$$a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_1 + a_1 q = 2 \Rightarrow a_1(1 + q) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{1 + q}$$

$a_1 + a_3 = 5 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 5$
Podstawiając do drugiego równania, otrzymujemy:

$$\frac{2}{1+q} + \frac{2}{1+q} \cdot q^2 = 5$$

$2 + 2q^2 = 5 + 5q$
$2q^2 - 5q - 3 = 0$
$\Delta = 49$

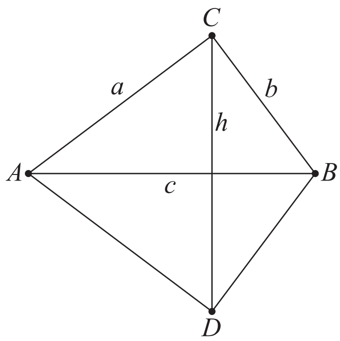
$q = 3$ lub $q = -\frac{1}{2}$

Ciąg jest rosnący ($q > 0$), czyli $q = 3$.
Odpowiedź: D.

Zadanie 11. (1 pkt)

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Dane: $a = 400$ km; $b = 300$ km; $c = 500$ km



Zauważmy, że trójkąt ABC jest prostokątny (tw. odwrotne do tw. Pitagorasa). Punkt D jest symetryczny do C względem prostej zawierającej AB, więc CD jest prostopadłe do AB.
Odległość między lotniskami C i D jest równa $2h$.

$$\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$$

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{400 \cdot 300}{500} = 240 \quad \text{(km)}$$

$2h = 480$ (km)
Odpowiedź: A.

Zadanie 12. (1 pkt)

P.10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

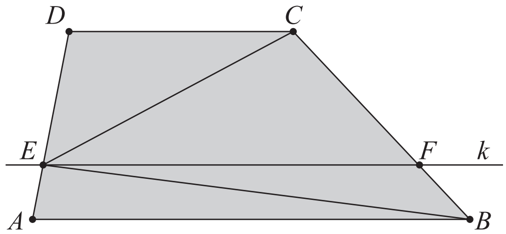
Liczb trzycyfrowych jest: $N = 900$.
Liczb trzycyfrowych podzielnych przez 13 jest: $n = 69$.

$$P = \frac{69}{900} = \frac{23}{300}$$

Odpowiedź: D.

Zadanie 13. (2 pkt)

III.10.1. Uczeń korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe.



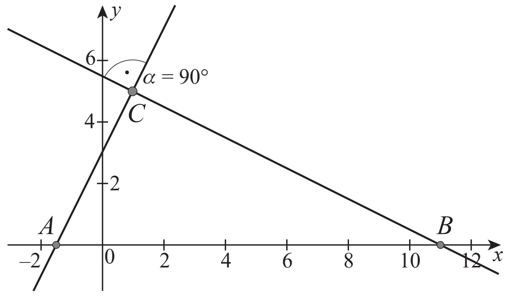
Prosta k jest równoległa do podstaw AB i CD.
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEF$ – kąty naprzemianległe
$\sphericalangle DCE = \sphericalangle FEC$ – kąty naprzemianległe
Dodając stronami, otrzymamy tezę.
$\sphericalangle ABE + \sphericalangle DCE = \sphericalangle BEC$

Punktacja:
2 – przeprowadzenie pełnego uzasadnienia.

Zadanie 14. (2 pkt)

P4.6. Uczeń wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.

Prosta prostopadła do $y = 2x + 3$ i przechodząca przez punkt $C = (1, 5)$.



$y = -\frac{1}{2}x + b$

$5 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b$

$b = \frac{11}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

Mamy $A = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ i $B = (11, 0) \Rightarrow |AB| = \frac{25}{2}$

$h = 5$

$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 5 = \frac{125}{4}$

Punktacja:
1 – wyznaczenie prostej prostopadłej;
1 – obliczenie pola figury.

Zadanie 15. (2 pkt)

P3.5. Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

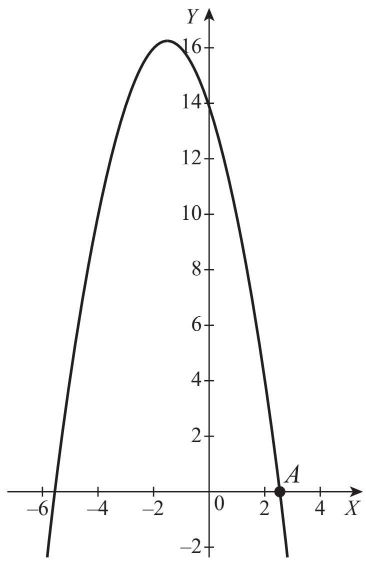
$(x - 1)^2 - 2(x + 2)^2 \geq 7(-3 - x)$

$x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 8x - 8 \geq -21 - 7x$

$-x^2 - 3x + 14 \geq 0$

$x = \frac{3 + \sqrt{65}}{-2} \approx -5,5$

$x = \frac{3 - \sqrt{65}}{-2} \approx 2,5$



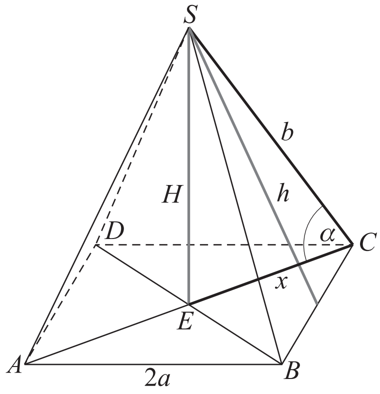
Odpowiedź: 2.

Punktacja:
1 – doprowadzenie nierówności do postaci $-x^2 - 3x + 14 \geq 0$;
1 – wskazanie największej liczby całkowitej spełniającej nierówność: 2.

Zadanie 16. (4 pkt)

P9.6. Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

III.11.2. Uczeń oblicza objętość i pole powierzchni ostrosłupa.



$P_c = 384$

$(2a, h, H)$ – ciąg arytmetyczny

$r = -2$ – różnica ciągu

$384 = (2a)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h$

$384 = 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot (2a - 2)$

$3a^2 - 2a - 96 = 0$

$\Delta = 1156$

$a = 6,\ a = -\frac{32}{6} < 0$

Wobec tego $2a = 12$, $h = 10$, $H = 8$.
Trójkąt CES jest prostokątny.
$x^2 + H^2 = b^2$
$\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 8^2 = b^2$
$b^2 = 136$
$b = 2\sqrt{34}$
Sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy:

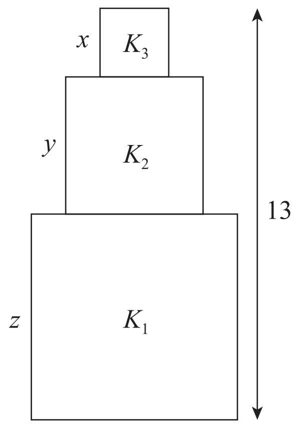
$$\sin\alpha = \frac{H}{b}$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{2\sqrt{34}} = \frac{2\sqrt{34}}{17}$$

Punktacja:
1 – ułożenie równania z jedną niewiadomą umożliwiającego wyznaczenie a (lub h);
1 – wyznaczenie $2a$, h i H;
1 – wyznaczenie b;
1 – wyznaczenie sinusa szukanego kąta.

Zadanie 17. (4 pkt)

P4.12. Uczeń wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).



$x, y, z > 0$ – długości boków kwadratów.
Kwadraty K_1 i K_3 są podobne w skali k:

$$P_1 = 9P_3 \Rightarrow \frac{P_1}{P_3} = 9 \Rightarrow k = 3$$

Zatem $z = 3x$.
Oznaczmy przez f funkcję opisującą sumę pól trzech kwadratów.
Z warunków zadania:
$x + y + z = 13$
$x + y + 3z = 13$
$y = 13 - 4x$
$f = x^2 + y^2 + z^2$
$f(x) = x^2 + (13 - 4x)^2 + (3x)^2$
$f(x) = 26x^2 - 104x + 169$

Suma pól kwadratów będzie najmniejsza, jeśli funkcja f przyjmie wartość najmniejszą, przy czym $0 < x < \frac{13}{4}$. Jest to funkcja kwadratowa, gdzie $a > 0$ i pierwsza współrzędna wierzchołka $p = \frac{104}{52} = 2$ spełnia warunek $0 < p < \frac{13}{4}$, więc wartość najmniejszą przyjmuje w wierzchołku.
Zatem $x = 2$, $y = 5$ i $z = 6$.
Długości boków kwadratów: $x = 2$, $y = 5$, $z = 6$.

Punktacja:
1 – zapisanie warunków wynikających z treści zadania;
1 – wyznaczenie funkcji jednej zmiennej opisującej sumę pól kwadratów;
1 – uzasadnienie, dla jakiej wartości x suma pól jest najmniejsza;
1 – wyznaczenie długości boków kwadratów.