MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom podstawowy)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (0-1). Odpowiedź: D

P.1.6 Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;

G.7.3. Uczeń rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;

$x\log_2 12 - 8 = x\log_2 3$, $x(\log_2 12 - \log_2 3) = 8$, $x\log_2 4 = 8$, $x = 4$

Zadanie 2. (0-1). Odpowiedź: C

P.1.4. Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;

$$\left(5\sqrt{5}\right)^{20} = \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{20} = 5^{30}$$

$$\frac{5^{30}}{5^{27}} = 5^3 = 125$$

Zadanie 3. (0-1). Odpowiedź: C

P.1.9. Uczeń wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Masę całego roztworu x wyznaczamy z równania $\frac{5}{x} \cdot 100 = 2$, czyli $x = 250$. Zatem masa wody to $250 - 5 = 245$ g.

Zadanie 4. (0-1). Odpowiedź: A

P.3.8. Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych.

$$x = \frac{4}{\sqrt{2} - 2} = -2\left(\sqrt{2} + 2\right)$$

Zadanie 5. (0-1). Odpowiedź: B

P.3.4. Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

$x^2 < 10000$, czyli $-100 < x < 100$.

Liczby całkowite spełniające nierówność to: –99, –98, ..., –1, 0, 1, ..., 98, 99. Wszystkich ich jest 99 + 99 + 1 = 199.

Zadanie 6. (0-1). Odpowiedź: D.

III.6.7. Uczeń wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.

$6a^2 = 4\pi R^2$, czyli $a = \frac{2\sqrt{\pi}R}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6\pi}R}{3}$.

Zadanie 7. (0-1). Odpowiedź: A.

P. 6.1 Uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;

Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy $|AC| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$. Zatem cosinus kąta BAC jest równy $\frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 8. (0-1). Odpowiedź: C.

P. 6.4 Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy $\sin^2\alpha + (3\sin\alpha)^2 = 1$. Stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, gdyż α jest kątem ostrym.

Zadanie 9. (0-1). Odpowiedź: B.

P. 8.7 Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Ponieważ $B = (-2, 3)$ i $C = (-2, -3)$, więc $|AB| = 4$ i $|BC| = 6$. Kąt ABC jest kątem prostym, czyli $P = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Zadanie 10. (0-1). Odpowiedź: B.

P. 4.6 Uczeń wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

P. 8.5 Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka;

Szukana prosta ma postać $y = 2x + b$. Środkiem odcinka AB jest punkt $(1, -1)$, czyli $2 + b = -1$. Stąd $b = -3$.

Zadanie 11. (0-1). Odpowiedź: C.

P. 10.3 Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest 36. Aby w drugim rzucie wypadła 1,5 razy większa liczba oczek niż w pierwszym rzucie musi wypaść para (2, 3) lub (4, 6). Zatem z klasycznej definicji prawdopodobieństwa otrzymujemy, że szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Zadanie 12. (0-1). Odpowiedź: D.

III 9.4 Uczeń wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Ponieważ $\frac{x+y}{2} = 14$,więc $x + y = 28$. Zatem $11 = \frac{x+y+z}{3} = \frac{28+z}{3}$, czyli $z = 5$.

Zadanie 13 (0-2)

P. 1.4 Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych**;**

P. 2.1 Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia

Korzystając ze wzorów $a^{mn} = (a^m)^n$ i $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ otrzymujemy

$$9^{10} - 4^{10} = (3^{10})^2 - (2^{10})^2 = (3^{10} - 2^{10})(3^{10} + 2^{10}) = [(3^5)^2 - (2^5)^2](3^{10} + 2^{10}) = (3^5 - 2^5)(3^5 + 2^5)(3^{10} + 2^{10}) =$$
$$= 211 \cdot (3^5 + 2^5)(3^{10} + 2^{10}) .$$

Punktacja:
2 – przeprowadza pełny dowód

Zadanie 14. (0-2)

P 5.3 Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

Ponieważ $a_n = a_1 + (n - 1)r$, więc $a_{10} - a_5 = 5r$. Zatem $5r = -10$, czyli $r = -2$.
Ponieważ $a_7 = a_1 + 6r$, więc $a_1 - 12 = -2$, czyli $a_1 = 10$.

Zauważmy ponadto, że liczby $a_1, a_3, a_5, ..., a_{199}$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej $2r = -4$ i pierwszym wyrazie $a_1 = 10$.

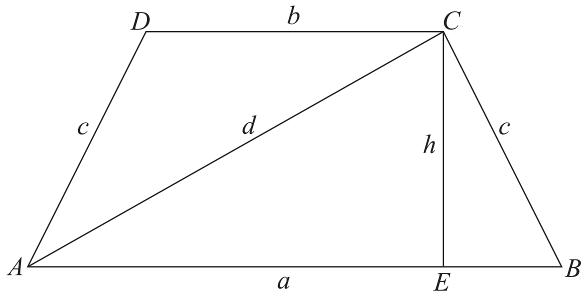
Zatem szukana suma jest równa $\frac{10-386}{2} \cdot 100 = -188 \cdot 100 = -18800$

Punktacja
1 – wyznacza r oraz a_1
1 – wyznacza sumę.

Zadanie 15. (0-2)

III 10.7 Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa;

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Zauważmy, że $|EB| = \frac{a-b}{2}$. Zatem

$|AE| = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta EBC otrzymujemy: $c^2 = h^2 + |EB|^2$
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta AEC otrzymujemy: $h^2 = d^2 - |AE|^2$.
Stąd

$c^2 = d^2 + |EB|^2 - |AE|^2 = d^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = d^2 - ab$, czyli $c = \sqrt{d^2 - ab}$.

Punktacja
1 – uzasadnia, że $c^2 = d^2 + |EB|^2 - |AE|^2$
1 – dokańcza obliczenia.

Zadanie 16. (0-4)

P.3.5 Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;

P.4.9 Uczeń wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

Wyznaczamy równanie funkcji w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x+1)^2 + 7$.
Układamy nierówność: $-2(x+1)^2 + 7 < -1$.
Rozwiązujemy nierówność:
$-2(x+1)^2 < -8$,
$(x+1)^2 > 4$,
$x + 1 < -2$ lub $x + 1 > 2$,
$x < -3$ lub $x > 1$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie funkcji
1 – zapisanie nierówności
2 – rozwiązanie nierówności

Zadanie 17. (0-4)

P.7.1 Uczeń stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;

P.7.4 Uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.
Pole trójkąta ABC możemy zapisać w postaci

$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \sin\alpha$, gdzie $0 < \alpha < 90°$. Zatem

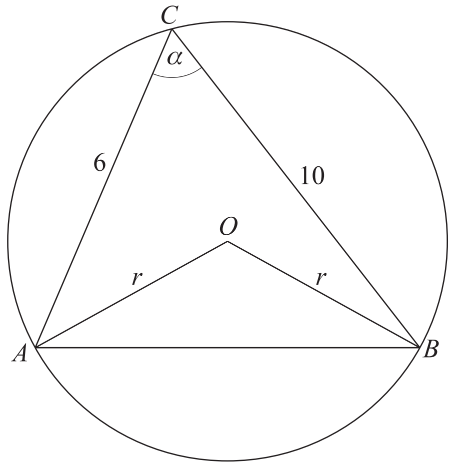
$30 \sin\alpha = 15\sqrt{2}$, czyli $\alpha = 45°$.

Kąt AOB jest kątem środkowym opisanym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB, czyli kąt AOC jest kątem prostym.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO otrzymujemy $|AB| = \sqrt{2}r$.

Obwód trójkąta ABO wynosi $2r + \sqrt{2}r = \left(2 + \sqrt{2}\right)r$.

Zatem $\left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot r = 8$, stąd $r = 4\left(2 - \sqrt{2}\right)$.



Punktacja

1 – wyznacza miarę kąta ACB
1 – wyznacza miarę kąta AOB
2 – wyznacza długość promienia