MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. Poziom podstawowy.
Rozwiązania zadań.

Zadnie 1. (0-1). Odpowiedź: D

G. Uczeń posługuje się pojęciem wartości bezwzględnej.

$$\left(\left|\sqrt{2}-2\right|+\left|\sqrt{2}+2\right|\right)^2=\left(-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2\right)^2=4^2=16$$

Zadnie 2. (0-1). Odpowiedź: B

P 1.7. Uczeń oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Wynik rzeczywisty $\dfrac{0{,}5+0{,}(3)}{6^{-1}}=5$

Wynik ucznia 4,8

Błąd względny $\dfrac{5-4{,}8}{5}\cdot 100\%=4\%$

Zadanie 3. (0-1). Odpowiedź: B

P 1.9. Uczeń wykonuje obliczenia procentowe.

x – liczba cukierków w sklepie
0,4 x – liczba cukierków czekoladowych
0,2 (0,4 x) – liczba cukierków czekoladowych z galaretką
0,2 (0,4 x) = 0,08 x, czyli 8% wszystkich cukierków

Zadanie 4. (0-1). Odpowiedź: A

P 1.5. Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

P 1.6. Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu.

$$\log_3\frac{3^{11}+3^{12}+3^{13}}{13}=\log_3\frac{3^{11}(1+3+9)}{13}=\log_3\frac{3^{11}\cdot 13}{13}=\log_3 3^{11}=11$$

Zadanie 5. (0-1). Odpowiedź: A

P 3.7. Uczeń korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań

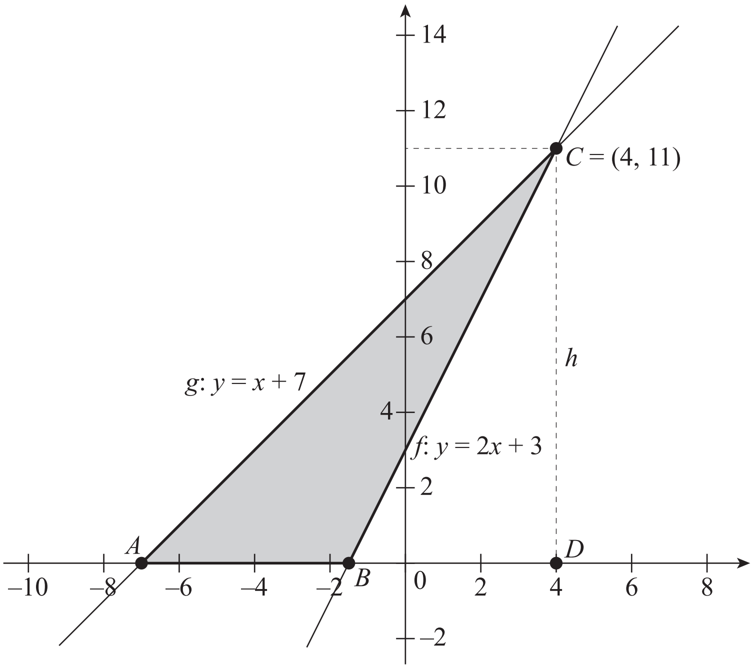
P 3.4. Uczeń rozwiązuje równanie kwadratowe

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x}{x-1}$ zał. $x\neq 1$

$x^3+3x^2-4x=0$
$x(x^2+3x-4)=0$
$x=0,\ x=1,\ x=-4$
Suma miejsc zerowych $-4+0=-4$

Zadanie 6. (0-1). Odpowiedź: C

G 7.6. Uczeń rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi



Zadanie 7. (0-1). Odpowiedź: B

P 2.1. Uczeń stosuje wzory skróconego mnożenia.

P 3.3. Uczeń rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

$(2x-3)^2-(2-3x)(3x+2)-13(x^2+x+1)\geq 0$

$4x^2-12x+9-4+9x^2-13x^2-13x-13\geq 0$

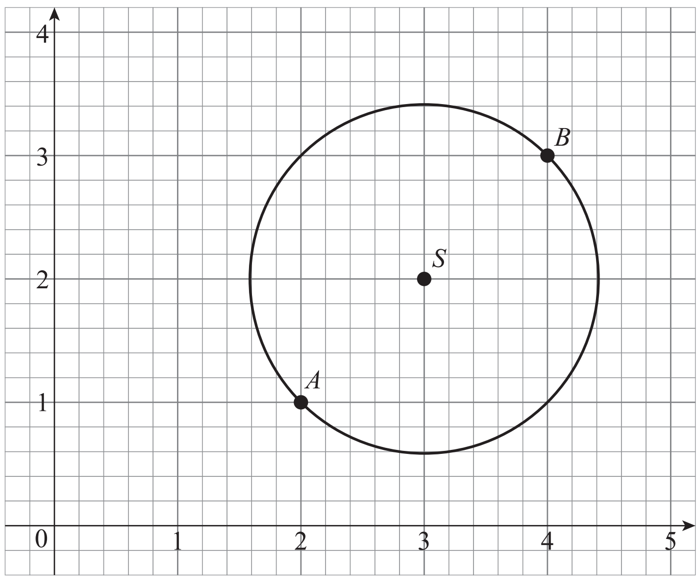
$-25x\geq 8$

$x\leq -\dfrac{8}{25}$

Zadanie 8. (0-1). Odpowiedź: D

P 8.6. Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

P 8.7. Uczeń znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych symetrii środkowej.

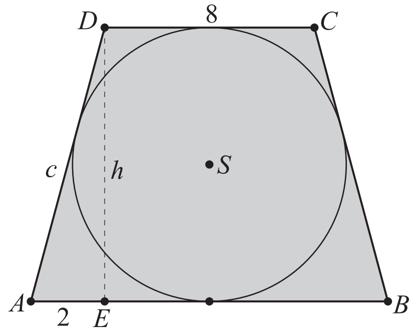


Jeśli promień okręgu opisanego jest równy $\sqrt{2}$, to przekątna kwadratu ma długość $2\sqrt{2}$, a bok kwadratu 2. Zatem odległość pozostałych wierzchołków od punktu A musi wynosić 2 lub $2\sqrt{2}$ Taki warunek spełnia punkt $(4, 3)$

Zadanie 9. (0-1). Odpowiedź: A

G 10.7. Uczeń korzysta z twierdzenia Pitagorasa.

G 10.9. Uczeń oblicza pole trapezu.



Wiadomo, że $a + b = 2c$, stąd $c = 10$.

Z twierdzenia Pitagorasa do trójkąta AED:

$|AD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2$

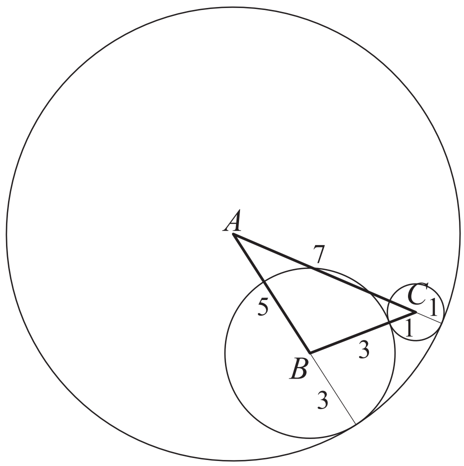
$100 = 4 + h^2$

$h = 4\sqrt{6}$

Pole trapezu $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+8}{2} \cdot 4\sqrt{6} = 40\sqrt{6}$

Zadanie 10. (0-1). Odpowiedź: B

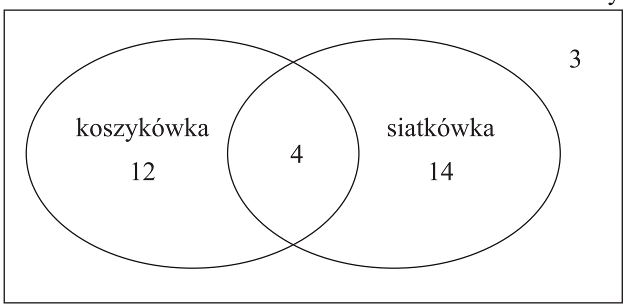
P 7.2. Uczeń korzysta z własności okręgów stycznych.



Zadanie 11. (0-1). Odpowiedź: B

P 10.3 Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa

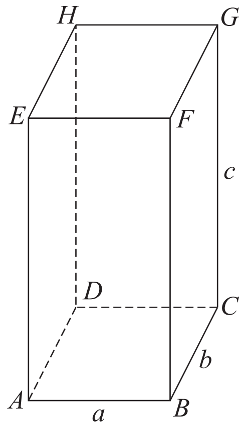
cała klasa 33 osoby



Siatkówki ani koszykówki nie uprawiają 3 osoby, czyli $P(A) = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$.

Zadanie 12. (0-1). Odpowiedź: C

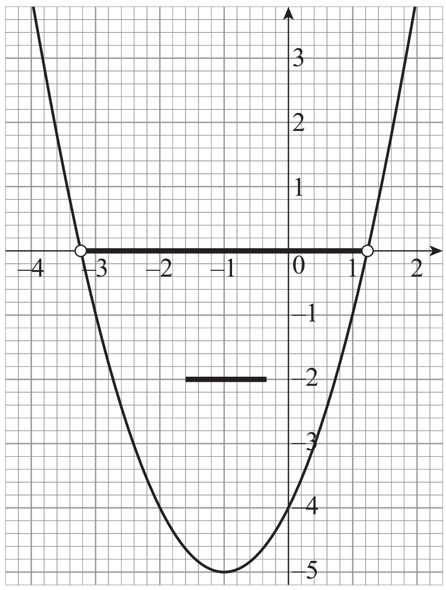
G 11.2. Uczeń oblicza objętość prostopadłościanu.



$P_1 = ab = 2$
$P_2 = ac = 4$
$P_3 = bc = 8$
Mnożąc stronami otrzymamy
$P_1P_2P_3 = abacbc = (abc)^2 = V^2$
Stąd $V = \sqrt{P_1P_2P_3} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt{64} = 8$

Zadanie 13. (0-2). 4

P 3.5. Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe.



$x^2 + 2x \le 4$
$x^2 + 2x - 4 \le 0$
$\Delta = 4 + 16 = 20$
$x_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{5}}{2}, \ x_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{5}}{2}$
$x_1 = -1 - \sqrt{5}, \ x_2 = -1 + \sqrt{5}$

Liczbą największą spełniającą warunek jest 1, a najmniejszą –3.
Ich różnica jest równa 4.

Punktacja:
1 – wyznaczenie miejsc zerowych
2 – obliczenie różnicy

Zadanie 14. (0-2).

P 2.1. Uczeń stosuje wzory skróconego mnożenia.

$\sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{15} + 5 + 3 - 2\sqrt{15} + 5} = \sqrt{16} = 4$ co kończy dowód.

Punktacja:
2 – przeprowadzenie pełnego uzasadnienia/obliczeń.

Zadanie 15. (0-2). $\bar{x} = 6\frac{1}{3}$

P 5.2. Uczeń bada, czy ciąg jest geometryczny.

$x - 2, x, 2x - 3$ – ciąg geometryczny
$\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2x-3}{x}$
$x^2 = 2x^2 - 7x + 6$
$x^2 = 7x + 6 = 0$
$\Delta = 25$
$x = 1, x = 6$
Pierwsze rozwiązanie 1 nie spełnia warunków zadania – ciąg niemonotoniczny (–1, 1, –1)

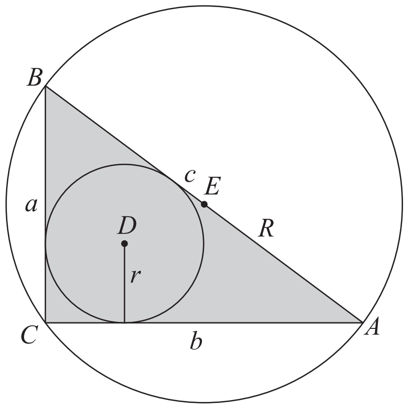
Drugie rozwiązanie 6 spełnia warunki zadania – ciąg (4, 6, 9)

Średnia arytmetyczna tych liczb $\bar{x} = \dfrac{4+6+9}{3} = \dfrac{19}{3} = 6\dfrac{1}{3}$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie ciągu geometrycznego 4, 6, 9
2 – obliczenie średniej arytmetycznej liczb $\bar{x} = \dfrac{19}{3} = 6\dfrac{1}{3}$.

Zadanie 16. (0-4). 6, 8, $\sin\sphericalangle A + \sin\sphericalangle B = \dfrac{7}{5}$

P 6.1. Uczeń wykorzystuje definicje funkcji trygonometrycznych.



$r = 2$
$R = 5$

Z własności trójkąta prostokątnego

$R = \dfrac{c}{2} \Rightarrow c = 2R$, czyli $c = 10$

$r = \dfrac{a+b-c}{2} \Rightarrow a + b = 14$

Z twierdzenia Pitagorasa
$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 + b^2 = 100$

Mamy $\begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$

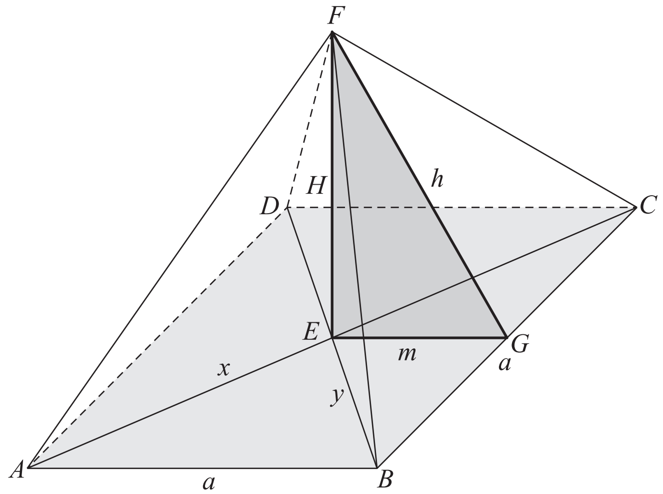
Suma sinusów kątów ostrych w tym trójkącie:
$\sin\sphericalangle A + \sin\sphericalangle B = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{6}{10} + \dfrac{8}{10} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$

Punktacja:
1 – wyznaczenie R i uzależnienie r od przyprostokątnych a i b
2 – zapisanie układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi
3 – obliczenie długość przyprostokątnych a i b
4 – obliczenie sumy sinusów kątów ostrych

Zadanie 17. (0-4). $V = \dfrac{320}{9} = 35\dfrac{9}{9}$, $P_C = 16\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$

P 9.2. Uczeń rozpoznaje w ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami.

P 9.6. Uczeń wykorzystuje trygonometrię do obliczania objętości.



$a = 6$
$|BD| = 2y = 8$
$\sphericalangle G = 45°$

Z twierdzenia Pitagorasa do trójkąta ABE
$x^2 + y^2 = a^2$
$x^2 + 16 = 36$
$x^2 = 20$
$x = 2\sqrt{5}$

Zatem przekątne rombu mają długość 8 i $4\sqrt{5}$

Pole rombu $P = \dfrac{8 \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 16\sqrt{5}$

Z pola rombu wyznaczamy wysokość $2m$:
$a \cdot 2m = 16\sqrt{5}$
$12m = 16\sqrt{5}$
$m = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

W trójkącie FEG mamy $\sphericalangle G = 45°$, zatem $m = H$ oraz $h = m\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}$.

Objętość ostrosłupa: $V = \dfrac{1}{3} \cdot 16\sqrt{5} \cdot \dfrac{4\sqrt{5}}{3} = \dfrac{320}{9} = 35\dfrac{5}{9}$.

Pole powierzchni: $P_C = 16\sqrt{5} + 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{4\sqrt{10}}{3} = 16\sqrt{5} + 16\sqrt{10} = 16\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie drugiej przekątnej i pola rombu
2 – wyznaczenie wysokości ostrosłupa
4 – obliczenie objętości i pola powierzchni ostrosłupa