MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. Poziom podstawowy.
Rozwiązania zadań.

Zadanie 1. Odpowiedź: C

P.8.6. Uczeń oblicza odległość dwóch punktów.

Sprawdzamy, czy odległość podanego punktu od punktu O jest mniejsza od 6. Warunek ten spełnia jedynie punkt z podpunktu C. Rzeczywiście $\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}<6$.

Zadanie 2. Odpowiedź: C

P.4.2. Uczeń oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu.

Sprawdzamy kolejne nierówności. Jedynie nierówność $f(-2)=\frac{1}{9}>\frac{1}{10}$ jest prawdziwa.

Zadanie 3. Odpowiedź: D

P.2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia.

Obwód wynosi $8a$, więc połowa obwodu to $4a$. Zatem długość drugiego boku jest równa $4a-(2a-3)=2a+3$.
Szukane pole to $(2a-3)(2a+3)=4a^2-9$.

Zadanie 4. Odpowiedź: C

P.8.3 Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych ma postać $y=ax$.

Z warunku prostopadłości $a=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$.

Zadanie 5. Odpowiedź: A

P.6.4. Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi.

Ponieważ $\cos 70° = \sin(90° - 70°) = \sin 20°$, więc $\sin 20° - \cos 70° = 0$.

Zadanie 6. Odpowiedź: D

P.5.2. Uczeń bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Z warunku na ciąg geometryczny mamy $(2a-4)^2=2\cdot 18=36$. Stąd $a=5$ lub $a=-1$.

Zadanie 7. Odpowiedź: D

P 2.1. Używa wzorów skróconego mnożenia.

P 3.3. Rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

$(x-2)^2-2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)<6-(x+1)^2$

...

$x>\frac{5}{2}$

Zadanie 8. Odpowiedź: B

P 1.6. Wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

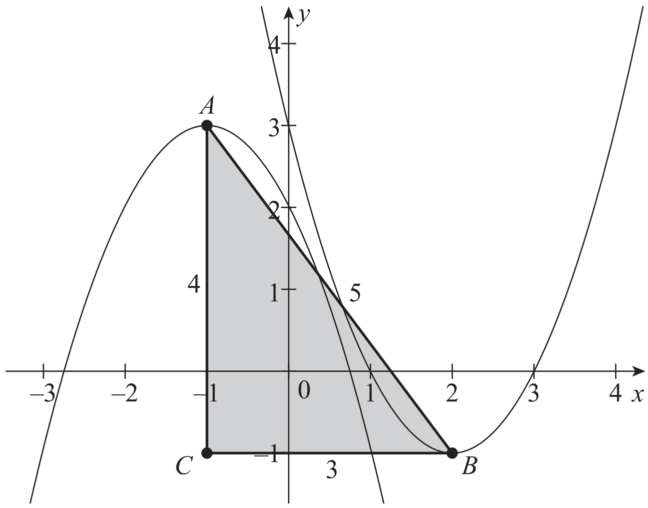
$\log_2 40 = \log_2(5 \cdot 8) = \log_2 5 + \log_2 8 = \log_2 5 + 3 = a + 3$

Zadanie 9. Odpowiedź: D

G 10.7. Korzysta z twierdzenia Pitagorasa.

P 4.8. Szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.

Wierzchołki parabol $y = x^2 - 4x + 3$ $B = (2, -1)$; $y = -x^2 - 2x + 2$ $A = (-1, 3)$



Zadanie 10. Odpowiedź: A

P 10.2. Zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Pierwszą kratkę można pomalować dowolnym z 4 kolorów, drugą – dowolnym z 3 pozostałych, trzecią – jednym z 2 pozostałych kolorów. Stąd wszystkich możliwości pomalowania kratek jest $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Zadanie 11. Odpowiedź: B

P 10.3. Oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zdarzeniem elementarnym jest rozmieszczenie dwóch osób w 10 wagonikach. Pierwsza i druga osoba może wsiąść do każdego z 10 wagoników. Zatem zdarzeń elementarnych jest $10 \cdot 10 = 100$.
Zdarzeń sprzyjających jest 10 (obaj przyjaciele siedzą razem w jednym z 10 wagoników).

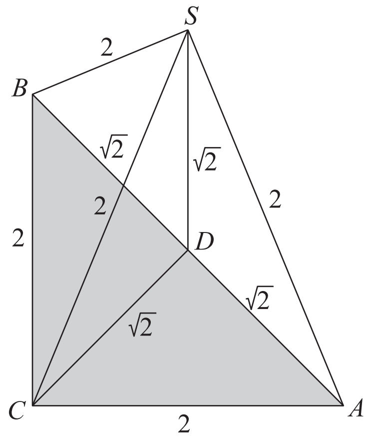
Stąd $P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Zadanie 12. Odpowiedź: C

G 11.2. Oblicza objętość ostrosłupa.

Patrz rysunek:

$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$



Zadanie 13. (0-2)

P.10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Liczby czterocyfrowe o sumie cyfr 1 to: 1000.
Liczby czterocyfrowe o sumie cyfr 2 to: 2000, 1001, 1010, 1100.
Liczby czterocyfrowe o sumie cyfr 3 to: 3000, 2001, 2010, 2100, 1002, 1020, 1200, 1011, 1101,1110.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 jest równe: $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Punktacja:
1 – wypisanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania.
1 – wyznaczenie prawdopodobieństwa.

Zadanie 14. (0-2)

P. 8.1. Uczeń wyznacza równanie prostej przechodzcej przez dwa dane punkty.

P.8.4. Uczeń oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B: $y = 2x - 3$.
Rozwiązujemy układ równań $y = 3x - 2$ i $y = 2x - 3$. Stąd $3x - 2 = 2x - 3$, czyli $x = -1$ i $y = -5$.
Punkt przecięcia to $(-1, -5)$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkty A i B.
1 – wyznaczenie punktu przecięcia się prostych.

Zadanie 15. (0-2)

P 2.1. Używa wzorów skróconego mnożenia.

$$\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{7}\ ,\ a > 0$$

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = 7$$

$$a + 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a} = 7$$

$$a + 2 + \frac{1}{a} = 7$$

$$a + \frac{1}{a} = 5 \in \boldsymbol{C}$$

c.n.d.

Punktacja:
2 – przeprowadzenie poprawnego uzasadnienia.

Zadanie 16. (0-4)

P.3.4. Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

P.6.3. Uczeń oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość.

Niech $|AB| = x$. Wówczas $h = x - 2$. Ponieważ P = 1, więc
$x(x - 2) = 1$, gdzie $x > 2$.
$x^2 - 2x - 1 = 0$,
$x_1 = 1 - \sqrt{2} < 2$ lub $x_2 = 1 + \sqrt{2} > 2$.
Zatem $|AB| = 1 + \sqrt{2}$.

Obwód jest równy $6\sqrt{2}-2=2\left(3\sqrt{2}-1\right)$, czyli $|AB|+|AD|=3\sqrt{2}-1$.

Stąd $|AD|=3\sqrt{2}-1-\left(\sqrt{2}+1\right)=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Niech α oznacza kąt ostry w równoległoboku. Wtedy $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Stąd $\alpha=30°$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie $|AB|$.
1 – wyznaczenie $|AD|$.
1 – wyznaczenie wartości sinusa kąta ostrego.
1 – podanie miary kąta ostrego.

Zadanie 17. (0-4)

P 4.15. Posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Rozwiązanie 1.
Wzór opisuje zależność wykładniczą.
Mamy:
$T=5730$

$\dfrac{m}{m_0}=0{,}125$, czyli 12,5%.

Podstawiając do wzoru otrzymamy:

$$m=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\frac{m}{m_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

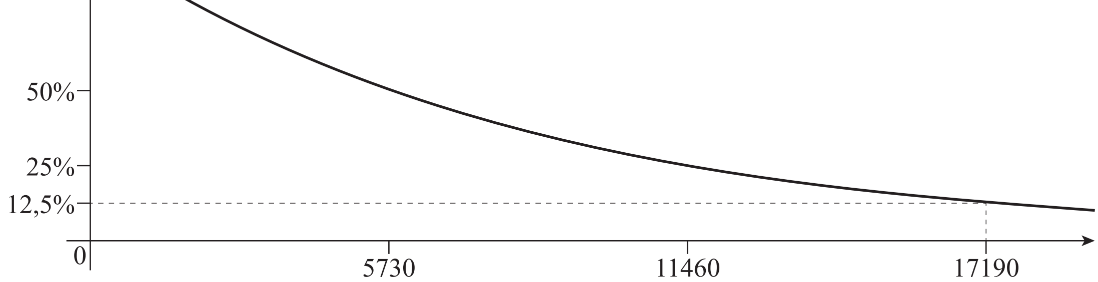
$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$3=\frac{t}{5730}$$

$t=17190$
Odp: Wiek mumii to 17190 lat.

Rozwiązanie 2.
W oparciu o wykres funkcji wykładniczej



Rozwiązanie 3 (dla spostrzegawczych)
Uczeń może zauważyć, że 12,5% oznacza trzykrotny rozpad połowiczny (pierwszy rozpad 50%, drugi rozpad 25%, trzeci rozpad 12,5%), co oznacza, że wiek mumii jest równy 3 razy po 5730 lat.

Punktacja:
1 – wyznaczenie zależności między m i m_0

1 – poprawne podstawienie do wzoru do postaci $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$.

2 – obliczenie wieku mumii.