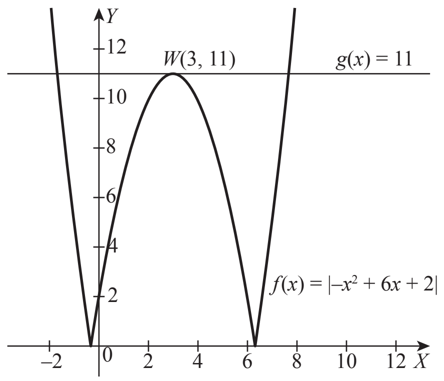
MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P4.1. Uczeń szkicuje wykres funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru.
R4.1. Uczeń rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$.
P4.3. Uczeń odczytuje z wykresu własności funkcji.



Rozwiązanie graficzne.
Odpowiedź: C.

Zadanie 2. (1 pkt)

R1.2. Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

$$x\log_5 9 + 2x = \frac{\log_3 15}{\log_3 5}$$

$$x\log_5 3^2 + 2x = \frac{\log_3 (3 \cdot 5)}{\log_3 5}$$

$$2x\log_5 3 + 2x = \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 5}$$

$$2x\frac{1}{\log_3 5} + 2x = \frac{1}{\log_3 5} + 1$$

$2x + 2x\log_3 5 = 1 + \log_3 5$
$2x(1 + \log_3 5) = 1 + \log_3 5$
$2x = 1$

$$x = \frac{1}{2}$$

Odpowiedź: A.

Zadanie 3. (2 pkt)

R5.2. Uczeń oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + 2(n+1)}{7n + \pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} + 2 + \frac{2}{n}}{7 + \frac{\pi}{n}} = \frac{3}{7} = 0,42857...$$

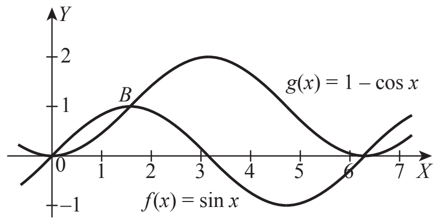
Odpowiedź: 428.

Zadanie 4. (2 pkt)

R6.6. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

Rozwiązanie graficzne.
$\sin x = 1 - \cos x$, gdzie $x \in (0, 2\pi)$

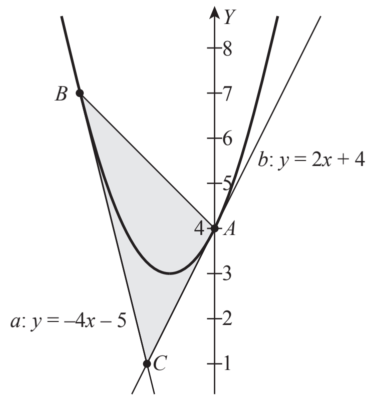
$$x = \frac{\pi}{2} \approx 1,5707$$



Odpowiedź: 157.

Zadanie 5. (3 pkt)

R11.2. Uczeń oblicza pochodne funkcji wymiernych.
R11.3. Uczeń korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.



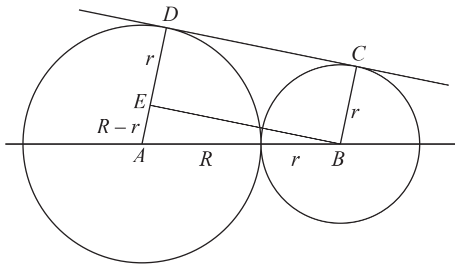
Szukamy stycznych do paraboli w punktach A i B.
$f'(x) = 2x + 2$
$f'(0) = 2$, stąd styczna $y = 2x + 4$;
$f'(-3) = -4$, stąd styczna $y = -4x - 5$.
Punkt C (przecięcie stycznych)

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -4x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Pole trójkąta ABC: 6,75.
Punktacja:
1 – sporządzenie rysunku i wyznaczenie jednej stycznej;
1 – wyznaczenie punktu przecięcia stycznych;
1 – obliczenie pola trójkąta.

Zadanie 6. (3 pkt)

P7.2. Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.
III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.
$BE \| CD$
$(R - r)^2 + |BE|^2 = (R + r)^2$
$|BE| = 2\sqrt{Rr}$
Pole obliczamy jako sumę pól prostokąta i trójkąta lub pole trapezu.
$P = (R + r)\sqrt{Rr}$
Punktacja:
3 – uzasadnienie zależności.

Zadanie 7. (5 pkt)

R3.1. Uczeń stosuje wzory Viète′a.
R3.2. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Warunki $k \neq 1$; $\Delta > 0$ i $k \neq 2$. Mamy $k > \frac{2}{3}$.

Korzystamy z wzorów Viète′a.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-2k}{k - 2} \geq 1$$

$$\frac{-2k}{k - 2} - 1 \geq 0$$

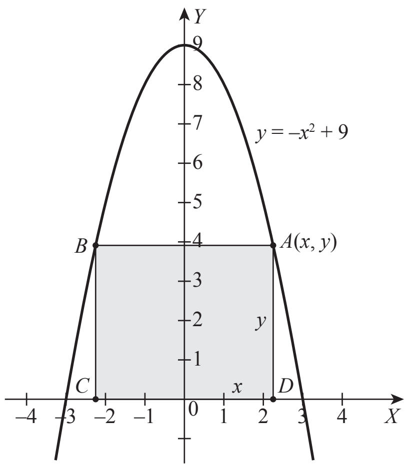
$$k \in \left\langle \frac{2}{3}, 2 \right)$$

Ostatecznie $k \in \left(\frac{2}{3}, 1 \right) \cup (1, 2)$.

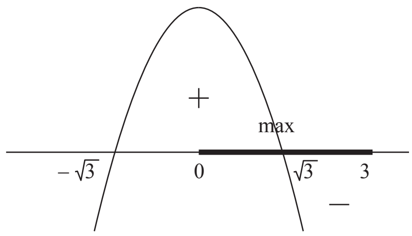
Punktacja:
1 – wyznaczenie i obliczenie warunków $k \neq 1$ i $\Delta > 0$;
2 – zastosowanie wzorów Viète′a i doprowadzenie do postaci $\frac{-2k}{k - 2} - 1 \geq 0$;
2 – bezbłędne rozwiązanie zadania i wyznaczenie k.

Zadanie 8. (5 pkt)

R11.6. Uczeń stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.



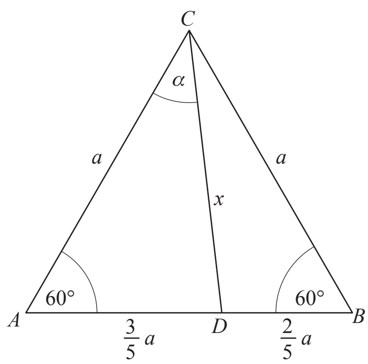
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.
Prostokąt $ABCD$ ma boki długości $a = 2x$ i $b = y$.
Ponadto $0 < x < 3$ i $y = -x^2 + 9$.
$P = 2xy = 2x(-x^2 + 9) = -2x^3 + 18x$
Funkcja $P(x)$ opisuje pole prostokąta w zależności od współrzędnej x punktu A. Aby pole było największe, funkcja $P(x)$ musi przyjmować wartość największą (maksymalną) dla $0 < x < 3$.
$P'(x) = -6x^2 + 18$
$P'(x) = 0$
$-3x^2 + 9 = 0$
$x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$
$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 6$
$P(x) = 2\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$
Współrzędne punktu $A = \left(\sqrt{3}, 6\right)$.



Punktacja:
1 – sporządzenie rysunku i zapisanie wzoru na pole prostokąta z użyciem x i y;
2 – wyznaczenie pochodnej funkcji P i jej miejsc zerowych;
2 – bezbłędne rozwiązanie zadania z wyznaczeniem współrzędnych punktu A.

Zadanie 9. (5 pkt)

R7.5. Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.



Stosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta BDC.

$$x^2 = \left(\frac{2}{5}a\right)^2 + a^2 - 2\left(\frac{2}{5}a\right)a \cdot \cos 60°$$

$$x = \frac{\sqrt{19}}{5}a$$

Stosujemy twierdzenie sinusów dla trójkąta ACD.

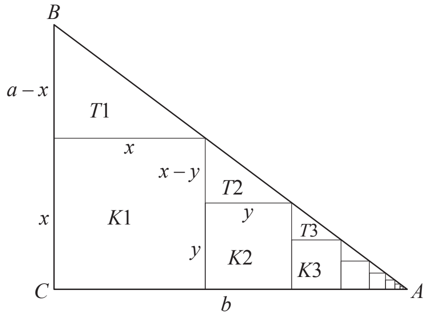
$$\frac{\frac{3}{5}a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin 60°}$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$$

Punktacja:
1 – sporządzenie rysunku i zapisanie wzór twierdzenia sinusów lub cosinusów dla danych;
2 – wyznaczenie długości odcinka x;
2 – bezbłędne rozwiązanie zadania z wyznaczeniem sinusa kąta ACD.

Zadanie 10. (7 pkt)

R7.4. Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne. Wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.
R5.3. Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.



Trójkąty $T1$, $T2$, $T3$, ... są podobne (kkk). Kwadraty $K1$, $K2$, $K3$, ... są podobne.
Uzasadnienie stałej skali podobieństwa dla kwadratów:
Niech $x(n)$ będzie długością boku n-tego kwadratu. Wtedy z podobieństwa n-tego trójkąta do trójkąta ABC (cecha kkk) wynika:

$$\frac{x(n-1)-x(n)}{x(n)}=\frac{a}{b}$$

$$x(n)=\frac{b}{a+b}\cdot x(n-1)\Rightarrow k=\frac{b}{a+b}$$

Zatem długości boków kwadratów $K1$, $K2$, $K3$, ... tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $k=\frac{b}{a+b}$, gdzie $|k|<1$.
Długość boku kwadratu $K1$ „wpisanego” w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b jest równa

$x=\frac{ab}{a+b}$, bo $\frac{a-x}{x}=\frac{a}{b}$.

Pola kwadratów

$$P(K1)=x^2=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$$

$$P(K2)=y^2=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

…

tworzą również nieskończony ciąg geometryczny, a jego suma jest równa: $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2}{1-\left(\frac{b}{a+b}\right)^2}=\frac{ab^2}{a+2b}$

Dla $a=3$ i $b=4$

$S=\frac{ab^2}{a+2b}=\frac{48}{11}$.

Punktacja:
1 – zauważenie podobieństwa trójkątów (kwadratów);
2 – wyznaczenie skali podobieństwa;
2 – wyznaczenie ciągu pól kwadratów;
2 – bezbłędne rozwiązanie zadania z wyznaczeniem sumy wszystkich kwadratów.
Uwaga: Konieczne jest uzasadnienie, że kolejne kwadraty są podobne ze stałą skalą.