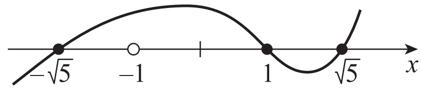
MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

Uczeń korzystając z wzorów skróconego mnożenia otrzymuje $\dfrac{\left(x^2-3-2\right)\left(x^2-3+2\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} \geq 0$

$\dfrac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} \geq 0,$



$\dfrac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)} \geq 0$, uwzględniając dziedzinę $x \in \left\langle -\sqrt{5}; -1\right) \cup \left(-1; 1\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{5}; -\infty\right)$.

Odpowiedź: D.

Zadanie 2. (1 pkt)

Jeżeli miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, to kąty mają miary 30°, 60°, 90°. Obwód jest równy $2a + a + a\sqrt{3} = 3a + a\sqrt{3} = a\left(3+\sqrt{3}\right)$, zatem

$a\left(3+\sqrt{3}\right) = 12\left(3+\sqrt{3}\right)$, więc $a = 12$. Pole trójkąta jest równe $\dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$.

Odpowiedź: D.

Zadanie 3. (1 pkt)

Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}n^3 - 2 - \frac{n^4-12n+5}{4n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-8n-n^4+12n-5}{4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-5}{4n} = 1.$$

Odpowiedź: D.

Zadanie 4. (1 pkt)

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - \left(x^2-4\right)}{x^2} = \dfrac{x^2+4}{x^2}$ Pochodna nie zeruje się, zatem funkcja nie osiąga ekstremum. Pochodna jest dodatnia w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$; $(0; \infty)$, zatem funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$; $(0; \infty)$, a nie w $\mathbb{R} - \{0\}$.

Odpowiedź: D.

Zadanie 5. (2 pkt)

Uczeń zauważa, że $a_{n+1} - a_n = \dfrac{4}{9}$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny, w którym $a_1 = 16$ i $r = \dfrac{4}{9}$. Korzystając z wzoru na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$S_n = \left(\dfrac{2a_1 + \left(n-1\right)r}{2}\right)n$, otrzymujemy $S_{100} = \dfrac{2 \cdot 16 + 99 \cdot \frac{4}{9}}{2} \cdot 100 = 3800$.

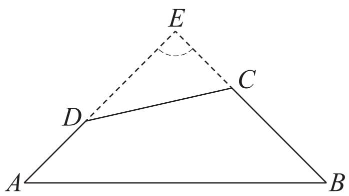
Odpowiedź: 3 8 0

Zadanie 6. (2 pkt)

Wiedząc, że stosunek pierwiastków jest równy 1 : 2 : 3, to $x_1 = a$, $x_2 = 2a$, $x_3 = 3a$. Korzystając z wzorów Viète'a dla równania trzeciego stopnia otrzymujemy $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, zatem
$a + 2a + 3a = 12$, więc $a = 2$, wobec tego $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 = 288$. Zadanie można również obliczyć porównując wielomiany $x^3 - 12x^2 + px + q = (x - a)(x - 2a)(x - 3a)$.

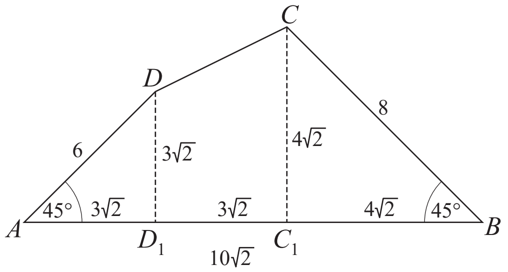
Odpowiedź: 2 8 8

Zadanie 7. (3 pkt)



Przedłużając ramiona BC i AD czworokąta $ABCD$ do przecięcia się w punkcie E otrzymamy trójkąt prostokątny równoramienny, w którym przeciwprostokątna AB ma długość $10\sqrt{2}$, zatem ramiona trójkąta AE i BE mają długości 10 cm. Pole ΔABE jest równe 50 cm^2, a pole ΔCDE 4 cm^2. Odejmując od pola ΔABE pole ΔCDE otrzymujemy pole czworokąta $ABCD$, które wynosi 46 cm^2.

II sposób.



$$P_{ABCD} = P_{AD_1D} + P_{D_1C_1CD} + P_{C_1BC} = \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{2} + \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} = 9 + 21 + 16 = 46$$

Punktacja:
1 – zauważenie, że ramiona AD i BC można przedłużyć i obliczenie długości boków ΔABE.
1 – obliczenie pola ΔCDE
1 – obliczenie pola $ABCD$

Zadanie 8. (3 pkt)

Uczeń korzysta z wzorów skróconego mnożenia. Z: $n \in \mathbb{N}$,
$(n + 2)^4 - n^4 = [(n + 2)^2 - n^2]\left[(n + 2)^2 + n^2\right] = [n^2 + 4n + 4 - n^2][n^2 + 4n + 4 + n^2] = (4n + 4)(2n^2 + 4n + 4) =$
$= 8(n + 1)(n^2 + 2n + 2) = 8(n + 1)\left((n + 1)^2 + 1\right)$, zatem liczby tej postaci dzielą się przez 8 i jedna z liczb $n + 1$ lub $n^2 + 2n + 2$ dzieli się przez 2, więc liczba $(n + 2)^4 - n^4$ dzieli się przez 16.

Punktacja:
1 – zastosowanie wzorów skróconego mnożenia
1 – doprowadzenie wyrażenia do postaci iloczynowej $8(n + 1)(n^2 + 2n + 2)$
1 – uzasadnienie, że jedna z liczb $n + 1$ lub $(n + 1)^2 + 1$ dzieli się przez 2

Zadanie 9. (3 pkt)

Uczeń oblicza pochodną funkcji

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{6x\left(x^2 + 3\right) - \left(3x^2 + 1\right) \cdot 2x}{\left(x^2 + 3\right)^2} = \dfrac{6x^3 - 18x - 6x^3 - 2x}{\left(x^2 + 3\right)^2} = \dfrac{16x}{\left(x^2 + 3\right)^2}$. Oblicza punkty,

których rzędna jest równa 1, czyli $\dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 3} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow$

$2x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1)$. $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$. Wyznacza równania stycznych do wykresu funkcji l: $y = x$ oraz k: $y = -x$. Zauważa, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, to $l \perp k$.

Punktacja:
1 – obliczenie pochodnej funkcji
1 – wyznaczenie punktów, dla których rzędna jest równa 1
1 – wyznaczenie równań stycznych i zauważenie, że iloczyn ich współczynników jest równy –1

Zadanie 10. (3 pkt)

Uczeń korzysta z własności logarytmów i otrzymuje

$$a = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} - \log_3 3 - \log_3 4 = \log_3 4 - 1 - \log_3 4 = -1$$

$$b = \sin 15° = \sin\left(45° - 30°\right) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \text{ zatem}$$

$$a + b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4}{4}.$$

Punktacja:
1 – korzysta z własności logarytmów
1 – korzysta z wzorów na sinus różnicy dwóch kątów
1 – oblicza wartości funkcji trygonometrycznych

Zadanie 11. (4 pkt)

Określa dziedzinę równania $\sin 10x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 5x}$.

Przekształca równanie do postaci $\sin 10x \cdot \operatorname{tg} 5x = 1$.
Korzysta z własności kąta podwojonego i związek na tg x, otrzymuje

$$2\sin 5x \cdot \cancel{\cos 5x} \cdot \frac{\sin 5x}{\cancel{\cos 5x}} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 5x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 5x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee 5x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 5x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 8k\pi}{20} \vee x = \frac{3\pi + 8k\pi}{20} \vee x = \frac{-\pi + 8k\pi}{20} \vee x = \frac{-3\pi + 8k\pi}{20}.$$

Uwzględniając dziedzinę równania $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, otrzymujemy $x \in \left\{\dfrac{\pi}{20}; \dfrac{3\pi}{20}; \dfrac{5\pi}{20}; \dfrac{7\pi}{20}; \dfrac{9\pi}{20}\right\}$

Punktacja:
1 – określa dziedzinę równania
1 – przekształca wyrażenie i korzysta z własności sinusa kąta podwojonego
1 – na podstawie wartości sinusa kąta wnioskuje jego miarę
1 – zapisuje wynik uwzględniając dziedzinę

II sposób.

Niech $5x = t$. Wtedy $t \in \left(0, \dfrac{5}{2}\pi\right)$.

Równanie ma sens wtedy, gdy $\begin{cases} \sin t \neq 0 \\ \cos t \neq 0 \end{cases}$.

$$\sin 2t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} \Leftrightarrow 2\sin t \cdot \cos t = \frac{\cos t}{\sin t} \Leftrightarrow 2\sin^2 t \cdot \cos t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(2\sin^2 t - 1\right) = 0$$

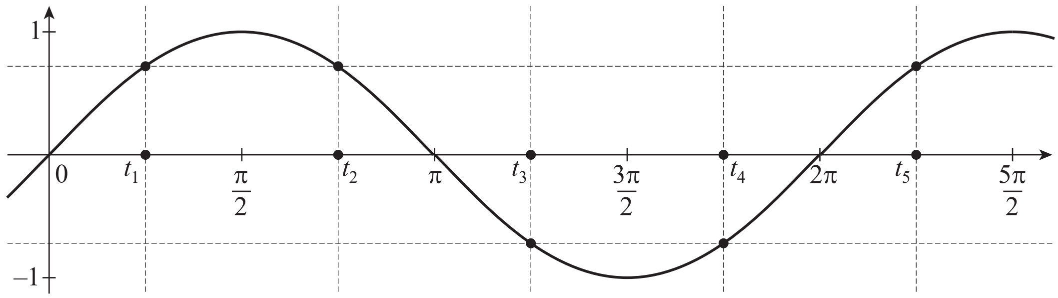
Uwzględniając warunek $\cos t \neq 0$ otrzymujemy

$\sin^2 t = \dfrac{1}{2}$.

Zatem

$\sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Zauważmy, że warunek $\sin t$ 0 jest spełniony.

Stąd uwzględniając $t \in \left(0, \frac{5}{2}\pi\right)$ otrzymujemy:

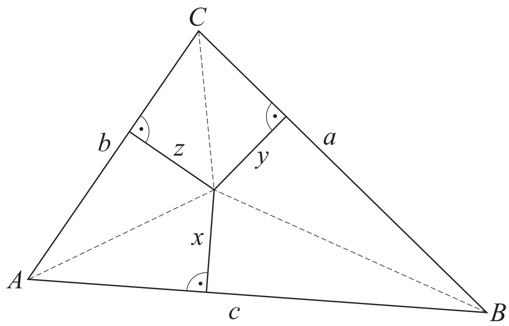


$t_1 = \frac{1}{4}\pi,\ t_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi,\ t_3 = \pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi,\ t_4 = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi,\ t_4 = 2\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{9}{4}\pi.$

Odp. $x \in \left\{\frac{1}{20}\pi, \frac{3}{20}\pi, \frac{5}{20}\pi, \frac{7}{20}\pi, \frac{9}{20}\pi\right\}$.

Punktacja:
1 – wprowadzenie zmiennej pomocniczej i zapisanie warunków, dla których równanie ma sens
1 – doprowadzenie do równania do postaci $\sin^2 t = \frac{1}{2}$
1 – rozwiązanie równań elementarnych $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\left(0, \frac{5}{2}\pi\right)$
1 – odpowiedź.

Zadanie 12. (4 pkt)



Uczeń zapisuje założenie i tezę zadania.
Z: $x, y, z, a, b, c, r \in \mathbb{R}_+$ r – promień okręgu wpisanego w ΔABC
T: $x + y + z > 2r$ *D*: Z porównania pól trójkątów wynika

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bz = \frac{1}{2}(ay + cx + bz)$, oraz

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}r(a + b + c) \Rightarrow \frac{1}{2}(cx + ay + bz) = \frac{1}{2}r(a + b + c)$

po przekształceniu otrzymamy
$cx + ay + bz = r(a + b + c)$
Nie ograniczając ogólności rozwiązań można przyjąć:
$c \ge a \wedge c \ge b$, wobec tego $r(a + b + c) = ay + bz + cx \le cy + cz + cx$,
czyli $r(a + b + c) \le c(x + y + z)$.
Z nierówności trójkąta wynika, że $c > a + b$, zatem $a + b + c > 2c$, więc $2rc < c(x + y + z)$, wobec tego $2r < x + y + z$, co należało wykazać.

Punktacja:
1 – sporządzenie rysunku i zapisanie tezy zadania
1 – porównanie pól trójkątów
1 – zauważenie związku między bokami trójkąta i skorzystanie z nierówności trójkąta
1 – przekształcenie wzoru i zapisanie tezy

Zadanie 13. (5 pkt)

Niech $|CD| = h$, $|CE| = R$, $|AB| = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na ΔABC.
$R > 0 \wedge h > 0$.
Uczeń korzysta z własności ciągu geometrycznego i zapisuje zależność (h, R, $2R$) – kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, to $R^2 = 2R \cdot h$.
Uwzględniając warunki zadania można zapisać $h \cdot 2h \cdot 4h = 64$, zatem $8h^3 = 64 \Rightarrow h = 2$.
Wobec tego $h = 2$, $R = 4$, $2R = 8$.
Aby obliczyć pole ΔCDE, należy obliczyć DE z twierdzenia Pitagorasa $|DE|^2 = R^2 - h^2$,
$|DE| = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. Obliczyć promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny CDE

$$r = \frac{2\sqrt{3}+2-4}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3}-1.$$

Uczeń oblicza pole koła wpisanego w ΔCDE $P_1 = \pi r^2 = \left(\sqrt{3}-1\right)^2\pi$.

Oblicza pole koła opisanego na ΔABC $P_2 = \pi R^2 = 16\pi$.

Porównuje pola kół: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2\pi}{16\pi} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{16} = \frac{4-2\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{8}$.

Punktacja:
1 – korzysta z własności ciągu geometrycznego
1 – oblicza długości h, R
1 – wyznacza długość r, promień koła wpisanego w ΔCDE
1 – oblicza pola koła wpisanego i opisanego
1 – porównuje pole i doprowadza do najprostszej postaci

Zadanie 14. (5 pkt)

Uczeń zapisuje warunki: $\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| < 2 \end{cases}$. Oblicza $\Delta = (m+1)^2 + 4m(m-2) = 5m^2 - 6m + 1$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow 5\left(m - \frac{1}{5}\right)(m-1) > 0 \text{ zatem } m \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \infty)$$

$|x_1 - x_2| < 2$, wyrażenia po obu stronach nierówności są dodatnie, można podnieść obustronnie do kwadratu, otrzymując $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 < 4$, po przekształceniach $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 4 < 0$

Stosując wzory Viète'a mamy $\left(\frac{m+1}{m-2}\right)^2 + \frac{4m}{m-2} - 4 < 0$, przekształcając wyrażenie otrzymamy

$$\frac{m^2+2m+1+4m^2-8m-4m^2+16m-16}{(m-2)^2} < 0 \Rightarrow \frac{m^2+10m-15}{(m-2)^2} < 0, \text{ zatem } m \in \left(-5-2\sqrt{10}; -5+2\sqrt{10}\right).$$

Uwzględniając powyższe warunki:

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ m \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \infty) \\ m \in \left(-5-2\sqrt{10}; -5+2\sqrt{10}\right) \end{cases} \quad \text{otrzymamy } m \in \left(-5-2\sqrt{10}; \frac{1}{5}\right) \cup \left(1; -5+2\sqrt{10}\right)$$

Punktacja:
1 – zapisze warunki i obliczy Δ
1 – przekształci nierówność $|x_1 - x_2| < 2$
1 – zastosuje wzory Viète'a
1 – rozwiąże nierówność $|x_1 - x_2| < 2$
1 – uwzględni warunki i zapisze odpowiedź

Uwaga.

Można też inaczej wyznaczyć $|x_1 - x_2|$.

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$$

Wtedy

$$|x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| < 2 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{a^2} < 4 \Leftrightarrow \frac{5m^2 - 6m + 1}{(m-2)^2} < 4 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 10m15}{(m-2)^2} < 0$$