MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (0-1)

Korzystając z własności wartości bezwzględnej otrzymamy

$|x-5||x+5|-2|x-5|=0 \Leftrightarrow |x-5|(|x+5|-2)=0 \Leftrightarrow$

$(|x-5|=0 \lor |x+5|=2)=0 \Leftrightarrow (x=5 \lor x+5=2 \lor x+5=-2) \Leftrightarrow x=5 \lor x=-3 \lor x=-7.$

Iloczyn pierwiastków równania jest równy 105.

Odpowiedź: C.

Zadanie 2. (0-1)

Aby wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji w przedziale domkniętym, należy zbadać, czy funkcja w tym przedziale ma ekstremum, jeżeli tak, to je wyznaczyć. Następnie obliczyć wartości funkcji na końcach przedziałów i porównać je z wartością ekstremum. $f'(x)=\dfrac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$, $f_{\min}=f(2)=8$, zaś $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=9$, $f(4)=10\dfrac{2}{3}$.

Odpowiedź: A.

Zadanie 3. (0-1)

$P_{\Delta}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$, korzystając z wzoru na pole trójkąta otrzymujemy

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$, zatem $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ lub $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$. Korzystając z twierdzenia cosinusów otrzymamy: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, wobec tego

$c=\sqrt{a^2+b^2-ab}$ lub $c=\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

Odpowiedź: D.

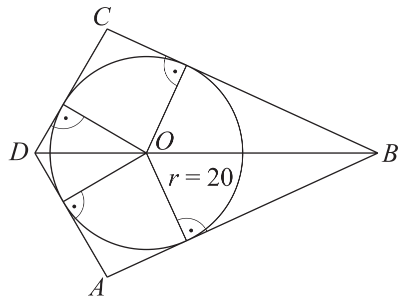
Zadanie 4. (0-1)

Okrąg o równaniu $x^2+y^2-2x+4y=0$ po przekształceniu ma równanie $(x-1)^2+(y+2)^2=5$, $S=(1,-2)$, $r=\sqrt{5}$.
Przekształcając punkt $S=(1,-2)$ przez symetrię środkową względem punktu $A=(5,1)$ otrzymamy $S'=(9,4)$, zatem okrąg po przekształceniu ma równanie $(x-9)^2+(y-4)^2=5$.

Odpowiedź: A.

Zadanie 5. (0-2)

4	0	0



Zauważenie, że jeżeli okrąg jest wpisany w czworokąt, to suma długości przeciwległych boków czworokąta jest równa oraz $ABCD$ jest deltoidem, to $|AB|=|BC|$ i $|AD|=|DC|$. Obwód $ABCD$ jest równy 240 cm , to $2|AB|+2|AD|=240$. Pole deltoidu

$P=2\cdot P_{\Delta AOB}+2\cdot P_{\Delta AOD}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot r+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot|AD|\cdot r=$

$=r(|AB|+|AD|)=20\cdot 120=2400\ \text{cm}^2$.

Zadanie 6. (0-2)

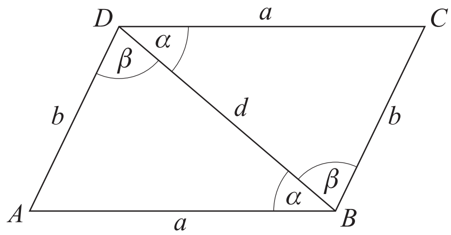
5	4	1

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji jest zerowanie się pierwszej pochodnej. $f'(x) = 6mx^2 - 6x - 1$, to $f'(x) = 0$ dla $x = 2$, więc $m = \frac{13}{24}$. Warunek wystarczający jest także spełniony.

Zadanie 7. (0-3)

d – długość przekątnej równoległoboku
α, β – kąty w ΔABC, zatem $|\sphericalangle BAD| = 180° - (\alpha + \beta)$
Korzystając z twierdzenia sinusów w ΔABD otrzymujemy:

$$\frac{d}{\sin\left(180° - (\alpha + \beta)\right)} = \frac{a}{\sin\beta}, \text{ to } a = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ oraz } \frac{d}{\sin\left(180° - (\alpha + \beta)\right)} = \frac{b}{\sin\alpha}, \text{ to } b = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Punktacja:
1 p. – Sporządzenie rysunku z odpowiednimi oznaczeniami i zauważenie, że $|\sphericalangle BAD| = 180° - (\alpha + \beta)$.
1 p. – Zastosowanie twierdzenia sinusów w ΔABD.
1 p. – Obliczenie długości boków a i b.

Zadanie 8. (0-3)

Jeżeli $x + y + z = 0$, to $z = -x - y$. Przekształcając lewą stronę tezy otrzymujemy

$$\frac{x^3 + y^3 - (x + y)^3}{3} = \frac{x^3 + y^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3}{3} = \frac{-3(x + y)xy}{3} = (-x - y) \cdot xy = xyz.$$

Punktacja:
1 p. – zauważenie, że $z = -x - y$
1 p. – zastosowanie wzorów skróconego mnożenia
1 p. – przekształcenie wyrażenia do postaci xyz

Zadanie 9. (0-3)

α, β, γ są kątami w trójkącie, to $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, więc $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Z założenia $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(1 - \cos\gamma)$, to $2\cos\alpha\cos\beta = 1 - \cos\left(180° - (\alpha + \beta)\right)$, więc $2\cos\alpha\cos\beta = 1 + \cos(\alpha + \beta)$. Korzystając z wzorów na cosinus sumy kątów mamy $2\cos\alpha\cos\beta = 1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, to $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1$. Korzystając z wzoru na cosinus różnicy kątów otrzymamy $\cos(\alpha - \beta) = 1$, zatem $\alpha - \beta = 0$, więc $\alpha = \beta$, wobec tego trójkąt ten jest równoramienny.

Punktacja:
1 p. – przekształcenie wzoru z wykorzystaniem wzoru redukcyjnego
1 p. – zastosowanie wzoru na cosinus sumy kątów
1 p. – zastosowanie wzoru na cosinus różnicy kątów

Zadanie 10. (0-5)

Przekształćmy równanie prostej k: $3x + 4y = 0$. Zauważmy, że okrąg będzie spełniał warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy odległości jego środka $S(a; b)$ od obu prostych będą równe 8, czyli gdy $\frac{|3a - 4b + 10|}{\sqrt{9 + 16}} = 8$ i $\frac{|3a + 4b|}{\sqrt{9 + 16}} = 8$. Po przekształceniu otrzymamy $|3a - 4b + 10| = 40$ i $|3a + 4b| = 40$. Po kolejnym przekształceniu otrzymamy $\begin{cases} a = \frac{35}{3} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = -\frac{35}{3} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{45}{4} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = -15 \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$. Wobec tego okręgami spełniającymi warunki zadania są okręgi o równaniach: $\left(x - \frac{35}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 64;$

$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{35}{4}\right)^2 = 64;\ \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{45}{4}\right)^2 = 64;\ \left|\frac{2x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3};1\right)$

Punktacja:

1 p. – Zauważenie, że odległości środka okręgi od prostych są równe.
1 p. – Zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej.
2 p. – Rozwiązanie układu równań z wartością bezwzględną.
1 p. – Zapisanie czterech równań okręgów.

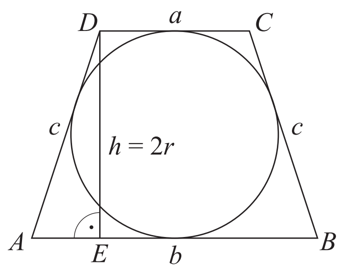
Zadanie 11. (0-4)

Lewa strona nierówności jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, to $|q| < 1$, więc $\left|\frac{2x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3};1\right)$. Nierówność przyjmie postać $\frac{1}{1 - \frac{2x}{1+x}} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{6x-4}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left\langle\frac{2}{3};1\right)$.

Punktacja:

1 p. – Wyznaczenie warunku $|q| < 1$
1 p. – Rozwiązanie nierówności $\left|\frac{2x}{1+x}\right| < 1$
1 p. – Zastosowanie wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego.
1 p. – Rozwiązanie nierówności $\frac{a_1}{1-q} \geq 5$

Zadanie 12. (0-7)

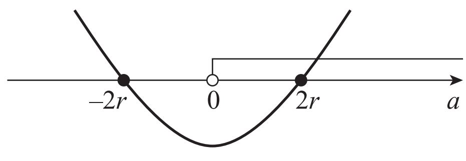


Zauważenie, że okrąg jest wpisany w trapez równoramienny wynika, że $a + b = 2c$ i $|AE| = \frac{b-a}{2}$, $b \geq a > 0$. ΔAED jest prostokątny, korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy $c^2 = (2r)^2 + |AE|^2$, wobec tego $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4r^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ po przekształceniu mamy $ab = 4r^2$, zatem $b = \frac{4r^2}{a}$. Pole trapezu:

$$P = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h = \frac{a + \frac{4r^2}{a}}{2} \cdot 2r = \frac{\left(a^2 + 4r^2\right)r}{a}. \quad P(a) = \frac{a^2 r + 4r^3}{a}.$$

Pole ma być najmniejsze, zatem należy obliczyć ekstremum funkcji $P(a)$, $a > 0$.

$$P'(a) = \frac{2ar \cdot a - a^2 r - 4^3}{a^2} = \frac{a^2 r - 4r^3}{a^2}. \quad P'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 r - 4r^3 = 0 \Leftrightarrow r(a^2 - 4r^2) = 0$$



$\Leftrightarrow r(a - 2r)(a + 2r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee a = 2r \vee a = -2r$, $r > 0 \wedge a > 0$.
$P'(a) > 0$ dla $a \in (2r; \infty)$, to $P\nearrow$ dla $a \in \langle 2r; \infty)$
$P'(a) < 0$ dla $a \in (0; 2r)$, to $P\searrow$ dla $a \in (0; 2r\rangle$
$P_{\min} = P(2r)$. Pole trapezu jest najmniejsze, gdy $a = 2r$, zatem $b = 2r$, wobec tego trapez jest kwadratem o boku długości $2r$.
Pole trapezu jest równe $4r^2$.

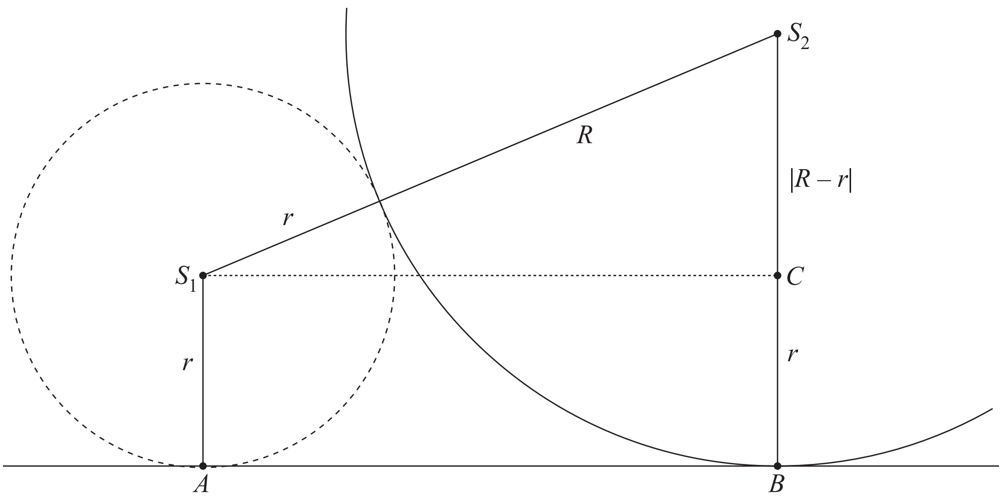
Punktacja:

1 p. – Zauważenie warunku, że okrąg jest wpisany w trapez.
1 p. – Uzależnienie boku b od a.
1 p. – Zbudowanie funkcji $P(a)$ pola trapezu w zależności od a i ustalenie jej dziedziny.
1 p. – Obliczenie pochodnej funkcji $P'(a)$.
1 p. – Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji $P'(a)$.
1 p. – Analiza pochodnej i wyznaczenie ekstremum.
1 p. – Obliczenie pola trapezu.

Zadanie 13. (0-5)

Twierdzenie.

Jeżeli okręgi $o_1(S_1, r)$ i $o_2(S_2, R)$ są styczne zewnętrznie i styczne do prostej w punktach A, B ($A \neq B$), to $|AB| = 2\sqrt{rR}$.



Jeżeli $R = r$, to $|AB| = 2r = 2\sqrt{rR}$.

Jeżeli $R \neq r$, to z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta S_1S_2C otrzymujemy:

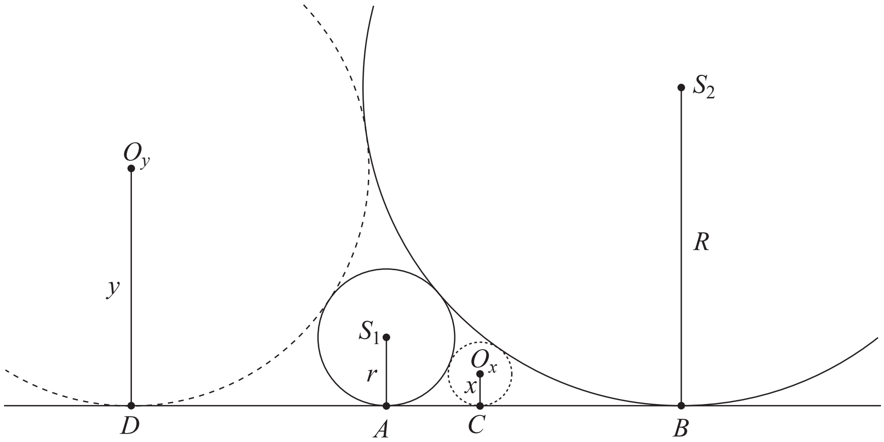
$|S_1C|^2 = (R+r)^2 - |R-r|^2 = 4Rr.$

Zatem

$|AB| = |S_1C| = 2\sqrt{rR}.$

Zadanie

Oznaczenia tak jak na rysunku.



Jeżeli $R \neq r$, to są dwie możliwości (rysunek): punkt styczności do prostej szukanego okręgu leży między punktami A i B lub punkt styczności nie leży między punktami A, B.
W pierwszy przypadku otrzymujemy:

$$|AB| = 2\sqrt{rR}$$

$$|AC| = 2\sqrt{rx}$$

$$|BC| = 2\sqrt{Rx}$$

Zatem

$$2\sqrt{rx} + 2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{rR}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{rR}}{\sqrt{r} + \sqrt{R}}$$

$$x = \frac{rR}{\left(\sqrt{r} + \sqrt{R}\right)^2}$$

W drugim przypadku (rysunek jest przy założeniu, że $R > r$) otrzymujemy:

$$|AB| = 2\sqrt{rR}$$

$$|AD| = 2\sqrt{ry}$$

$$|BD| = 2\sqrt{Ry}$$

Zatem

$$\left|2\sqrt{Ry} - 2\sqrt{ry}\right| = 2\sqrt{Rr}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{rR}}{\left|\sqrt{R} - \sqrt{r}\right|}$$

$$y = \frac{rR}{\left(\sqrt{R} - \sqrt{r}\right)^2}$$

Jeżeli $R = r$, to tylko pierwszy przypadek.
Wtedy

$$x = \frac{1}{4}r.$$

Punktacja:
1 p. – Sporządzenie rysunku z oznaczeniami
2 p. – Wyznaczenie długości odcinków y, z
2 p. – Wyznaczenie długości odcinka x