MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (0-1)

Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku wynika, że $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, lecz obwody i pola tych trójkątów są różne.

Odpowiedź. D.

Zadanie 2. (0-1)

Okrąg ma równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, gdzie $S_{AB} = \left(\frac{4+0}{2}; \frac{0-3}{2}\right) = \left(2; -\frac{3}{2}\right)$,

$r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{16+9} = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{5}{2}$, zatem $(x-2)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Odpowiedź. B.

Zadanie 3. (0-1)

Mamy 9 możliwości wyboru cyfr, które mogą być pierwszą, trzecią i piątą cyfrą liczby pięciocyfrowej. Pozostałe dwie cyfry możemy ustawić na tyle sposobów, ile jest wariacji dwuwyrazowych bez powtórzeń ze zbioru dziewięcioelementowego, czyli $9 \cdot V_9^2 = 648$.

Odpowiedź. D.

Zadanie 4. (0-1)

Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie warunkowym otrzymamy

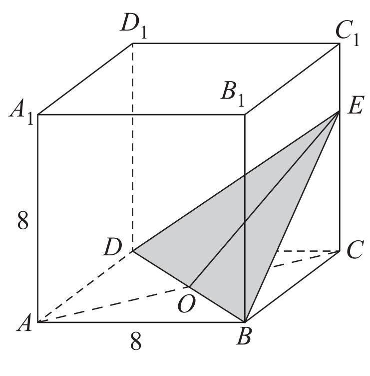
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0,2 = \frac{P(A \cap B)}{0,4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,08. \ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} \Rightarrow P(B) = \frac{0,08}{0,1} = 0,8$$

Odpowiedź. A.

Zadanie 5. (0-2)

3	6	9



Przekrojem sześcianu płaszczyzną jest trójkąt równoramienny BDE, którego pole jest równe $\frac{1}{2}|BD| \cdot |OE|$.

$|BD| = 8\sqrt{2}$, $|\sphericalangle COE| = 30°$, $|OC| = 4\sqrt{2}$, to $\frac{|OC|}{|OE|} = \cos 30°$,

więc $|OE| = \frac{8\sqrt{6}}{3}$. $P_{\Delta BDE} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3} \approx 36,9504$

Zadanie 6. (0-2)

6	6	6

Zbiór liczb całkowitych należących do przedziału (2; 12), to $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Losujemy jedną liczbę, to $|\Omega| = 9$. Niech A jest zdarzeniem polegającym na tym, że wylosowana liczba jest parzysta. Ponieważ $A = \{4, 6, 8, 10\}$, to $P(A) = \frac{4}{9}$. Niech B jest zdarzeniem polegającym na tym, że wylosowano liczbę większą od 8, to $B = \{9, 10, 11\}$, więc $P(B) = \frac{3}{9}$. Aby zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń, należy obliczyć $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$, zatem $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0,66667$

Zadanie 7. (0-3)

Korzystając z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej otrzymujemy $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

Przekształćmy wyrażenie $x^4 + \frac{250}{x^2} = x^4 + \frac{125}{x^2} + \frac{125}{x^2}$, po zastosowaniu nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej otrzymamy $\frac{x^4 + \frac{125}{x^2} + \frac{125}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^4 \cdot \frac{125}{x^2} \cdot \frac{125}{x^2}}$, zatem $x^4 + \frac{125}{x^2} + \frac{125}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{125 \cdot 125}$, więc $x^4 + \frac{250}{x^2} \geq 75$.

Punktacja:

1 p. – Zapisanie lewej strony nierówności w postaci $x^4 + \frac{125}{x^2} + \frac{125}{x^2}$.

1 p. – Zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej

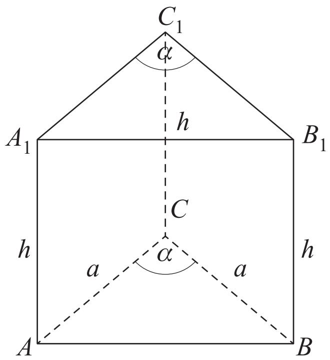
1 p. – Po zastosowaniu nierówności dla średnich i zapisanie w postaci $x^4 + \frac{250}{x^2} \geq 75$. Zadanie można obliczyć kilkoma innymi sposobami.

Zadanie 8. (0-3)

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.
ΔABC jest równoramienny, w którym $|AC| = |BC| = a$,
α – kąt między bokami AC, BC.

Z zał. $P_{ACC_1A_1} + P_{BCC_1B_1} = 2P_{ABC} \Rightarrow 2ah = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ah = a^2\sin\alpha \Rightarrow 2h = a\sin\alpha$ i $\sin\alpha \in (0; 1\rangle$, to $h \leq \frac{1}{2}a$.



Punktacja:

1 p. – Sporządzenie rysunku z odpowiednimi oznaczeniami i zauważenie zależności, że pole dwóch przystających ścian bocznych jest dwa razy większe od pola podstawy.

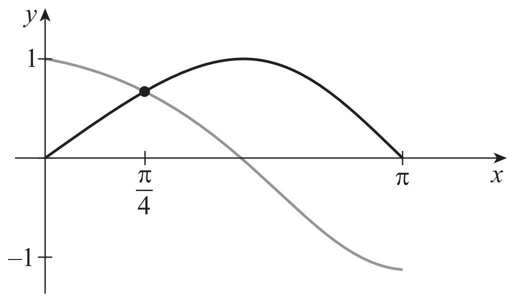
1 p. – Zapisanie zależności: $2ah = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin\alpha$ i przekształcenie jej.

1 p. – Zauważenie, że $\sin\alpha \in (0; 1\rangle$ i zapisanie wniosku $h \leq \frac{1}{2}a$.

Zadanie 9. (0-4)

$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x - 3 \leq 0$
$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3(1 - \cos^2 x) \leq 0$

Z jedynki trygonometrycznej mamy:
$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\sin^2 x \le 0$
$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \le 0$
$\sin x(\sin x - \cos x) \ge 0$
Z założenia $x \in \langle 0; \pi \rangle$, to $\sin x \ge 0$, zatem
$\sin x = 0$ lub $\sin x - \cos x \ge 0$
$\sin x = 0$ lub $\sin x \ge \cos x$, $x \in \langle 0; \pi \rangle$
Nierówność rozwiążemy graficznie



Odp. $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \pi \right\rangle \cup \{0\}$

Punktacja:
1 p. – Przekształcenie nierówności do postaci $\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \le 0$.
1 p. – Zapisanie nierówności w postaci $\sin x(\sin x - \cos x) \ge 0$ i zauważenie, że dla $x \in \langle 0, \pi \rangle$ wynika, że $\sin x \ge 0$.
1 p. – Rozwiązanie graficzne nierówności $\sin x \ge \cos x$.
1 p. – Dokończenie i zapisanie odpowiedzi.
Uwaga. Jeżeli w odpowiedzi nie jest uwzględnione 0, to zdający może maksymalnie otrzymać 3 punkty.

Zadanie 10. (0-4)

(a_n) nieskończony ciąg geometryczny, w którym $a_1 = \sqrt{x-3}$, $a_3 = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $S = 4\frac{1}{2}$, $x > 3$. Korzystając z własności ciągu geometrycznego mamy $a_3 = a_1 q^2$, to $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-3} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{x-3} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ lub $q = \frac{-1}{\sqrt{x-3}}$, z założenia ciąg jest o wyrazach dodatnich.

Korzystając z sumy nieskończonego ciągu geometrycznego zapiszemy $4\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x-3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x-3}}}$. Wprowadźmy zmienną pomocniczą $t = \sqrt{x-3}$, więc $\frac{9}{2} = \frac{t}{1 - \frac{1}{t}}$.

Po przekształceniu wyrażenia otrzymamy
$\frac{9}{2} = \frac{t^2}{t-1}$, to $2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow 2\left(t - \frac{3}{2}\right)(t-3) = 0$, zatem $\sqrt{x-3} = \frac{3}{2} \vee \sqrt{x-3} = 3$. Po kolejnym przekształceniu otrzymamy $x = \frac{21}{4} \vee x = 12$.

Punktacja:

1 p. – Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i wyznaczenie $q = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$.

1 p. – Zapisanie wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego.

2 p. – Rozwiązanie równania ze zmienną t i zapisanie wyniku $x = \frac{21}{4} \vee x = 12$.

Zadanie 11. (0-3)

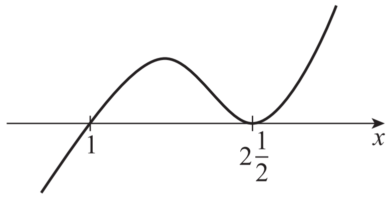
$P(x) = 2x^2 + x - 1 = 2\left(x+1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Wielomian $W(x) = x^3 + px + q$ jest podzielny przez wielomian

$P(x) = 2\left(x+1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, to $W(-1) = 0$ i $W\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, zatem $\begin{cases} -1 - p + q = 0 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}p + q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p + q = 1 \\ p + 2q = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -\frac{3}{4} \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Wielomian $W(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = \left(x+1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

$W\left(x-2\right) = \left(x-1\right)\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2$.

$W\left(x-2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \in \left(-\infty, -1\right\rangle \cup \left\{2\frac{1}{2}\right\}$



Punktacja:

1 p. –Rozłożenie wielomianu $P(x)$ na czynniki i wykorzystanie twierdzenia, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $P(x) = 2\left(x+1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

1 p. – Rozwiązanie układu równań $W(-1) = 0 \wedge W\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ i wyznaczenie $p = -\frac{3}{4}$ i $q = \frac{1}{4}$.

1 p. – Rozwiązanie nierówności $W(x-2) \leq 0$.

Zadanie 12. (0-3)

Wylosowanie funkcji zapisanej wzorem $f(x) = ax^2 + b$ odpowiada jednocześnie wylosowanie pary współczynników $(a; b)$. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jest postaci: $\Omega = \left\{(a; b); a, b \in \{-10, -9, ..., 4, 5\}\right\}$ i $|\Omega| = 16^2 = 256$.
Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wylosowaniu funkcji, która ma miejsce zerowe. Zdarzenie to możemy przedstawić w postaci sumy zdarzeń rozłącznych $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, gdzie: $A_1 = \{(a; b) \in \Omega; a = 0 \wedge b = 0\}$, $|A_1| = 1$
$A_2 = \left\{(a; b) \in \Omega; a < 0 \wedge b \geq 0\right\}$, $|A_2| = 10 \cdot 6 = 60$
$A_3 = \left\{(a; b) \in \Omega; a > 0 \wedge b \leq 0\right\}$, $|A_3| = 5 \cdot 11 = 55$.
Zatem $P(A) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + P\left(A_3\right) = \frac{1 + 60 + 55}{256} = \frac{29}{64}$.

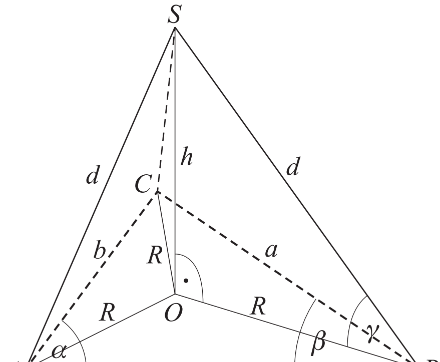
Punktacja:

1 p. – Wyznaczenie zbioru zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 256$.
1 p. – Zapisanie zdarzenia A w postaci zdarzeń rozłącznych i obliczenie ich elementów.
1 p. – Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $P(A) = \frac{29}{64}$.

Zadanie 13. (0-4)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku
α, β – kąty w ΔABC $|AS| = |BS| = |CS| = d$,
$|\sphericalangle OAS| = |\sphericalangle OBS| = |\sphericalangle COS| = \gamma$
Korzystając z twierdzenia, że jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakowe długości, to spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na ΔABC, w którym dane są kąty α i β. Korzystając z twierdzenia sinusów w ΔABC mamy $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, to $a = 2R\sin\alpha$ oraz

$\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, to $b = 2R\sin\beta$.



$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\left(180° - (\alpha+\beta)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) =$$

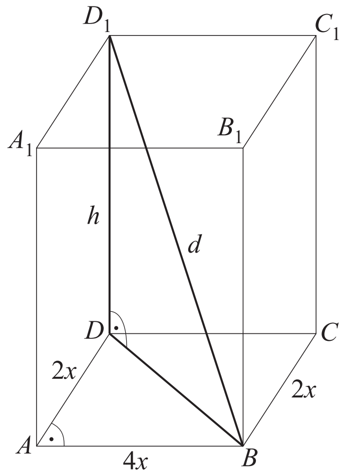
$= 2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$. ΔBOS jest prostokątny, to $\frac{h}{d} = \sin\gamma \Rightarrow h = d\sin\gamma$ i $\frac{R}{d} = \cos\gamma \Rightarrow R = d\cos\gamma$.

$$V = \frac{1}{3}P_{\Delta ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\cdot d\sin\gamma =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\cdot d\sin\gamma = \frac{2}{3}d^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos^2\gamma\sin\gamma.$$

Punktacja:
1 p. – Sporządzenie rysunku z oznaczeniami i zauważenie, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na ΔABC.
1 p. – Wyznaczenie pola ΔABC.
1 p. – Wyznaczenie R i h w BOS.
1 p. – Obliczenie objętości ostrosłupa.

Zadanie 14. (0-6)



Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok.
d – długości przekątnej prostopadłościanu
$4x$, $2x$ – długości boków prostokąta $ABCD$
h – wysokość prostopadłościanu , zatem
$V = 4x\cdot 2x\cdot h = 8x^2h$.
Objętość jest funkcją dwóch zmiennych x i h.
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w ΔBAD mamy
$|BD|^2 = 16x^2 + 4x^2 \Rightarrow |BD|^2 = 20x^2$
oraz w ΔBDD_1 otrzymamy $d^2 = h^2 + 20x^2$. Wobec tego

$$20x^2 = d^2 - h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{20}\left(d^2 - h^2\right) \wedge h \in (0; d).$$

Objętość jest funkcją zmiennej h i określa się wzorem

$$V(h) = 8x^2h = 8\cdot\frac{1}{20}\left(d^2 - h^2\right)\cdot h = \frac{2}{5}\left(d^2h - h^3\right) \wedge h \in (0; d).$$

Aby wyznaczyć ekstremum funkcji należy obliczyć pochodną i przeprowadzić analizę znaku pochodnej.

$$V'(h) = \frac{2}{5}\left(d^2 - 3h^2\right) \wedge h \in (0; d).$$

Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\left(d^2 - 3h^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(d - \sqrt{3}h\right)\left(d + \sqrt{3}h\right) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{d}{\sqrt{3}} \text{ lub } h = -\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

$$V'(h) > 0 \text{ dla } h \in \left(0; \frac{d\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow V \nearrow \text{ w } \left(0; \frac{d\sqrt{3}}{3}\right\rangle$$

$$V'(h) < 0 \text{ dla } h \in \left(\frac{d\sqrt{3}}{3}; d\right) \Rightarrow V \searrow \text{ w } \left\langle\frac{d\sqrt{3}}{3}; d\right)$$

$V_{\max} = V\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)$. Objętość prostopadłościanu jest największa, jeśli $h = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ i krawędzie podstawy mają długości $\frac{d\sqrt{30}}{15}$, $\frac{2d\sqrt{30}}{15}$.

Punktacja:

1 p. – Wybór zmiennej i wrażenia za pomocą tej zmiennej wielkości, które są potrzebne do zdefiniowania funkcji $V = 8x^2h$.

1 p. – Zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej, zapisanie objętości $V(h) = \frac{2}{5}\left(d^2h - h^2\right)$.

1 p. – Określenie dziedziny funkcji $h \in (0; d)$.

1 p. – Wyznaczenie pochodnej funkcji $V'(h) = \frac{2}{5}\left(d^2 - 3h^2\right)$.

1 p. – Obliczenie miejsc zerowych pochodnej $h = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $h = -\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

1 p. – Analiza znaku pochodnej i uzasadnienie, że funkcja posiada ekstremum dla $h = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ oraz odpowiedź.