MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P1.6. Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

R1.2. Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

$x = \log_3 \sqrt[3]{12} = \log_3 12^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_3 12 = \frac{1}{3}\log_3(4 \cdot 3) = \frac{1}{3}(\log_3 4 + \log_3 3) = \frac{1}{3}(2\log_3 2 + 1).$

Stąd $3x = 2\log_3 2 + 1$, czyli $\log_3 2 = \frac{3x-1}{2}$.

Odpowiedź: A.

Zadanie 2. (1 pkt)

R6.6. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

Dzieląc równanie obustronnie przez 2, otrzymujemy:

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1-m}{2}$,

$\cos 30° \sin x + \sin 30° \cos x = \frac{1-m}{2}$,

$\sin(30° + x) = \frac{1-m}{2}$, stąd

$-1 \le \frac{1-m}{2} \le 1$, czyli $-1 \le m \le 3$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (2 pkt)

R3.5. Uczeń stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

R3.6. Uczeń rozwiązuje równania wielomianowe.

$2x^3 - 7x + 2 = 0$

Korzystamy z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych. Stąd $x = -2$.

Wykorzystując ten pierwiastek i rozkładając wielomian (postać iloczynowa), otrzymamy

$(x+2)(2x^2 - 4x + 1) = 0$. Znajdujemy pierwiastki wyrażenia kwadratowego: $x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Największym pierwiastkiem równania jest $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}7071$

Odpowiedź: 707.

Zadanie 4. (2 pkt)

R11.2. Uczeń oblicza pochodne funkcji wymiernych.

Pochodna funkcji $f' = \frac{3x^2 + 4x + 19}{(3x+2)^2}$.

Stąd $\frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{\frac{1+2-5}{5}}{\frac{3+4+19}{5^2}} = \frac{-2}{5} \cdot \frac{25}{26} = \frac{-5}{13} = -0{,}3846$

Odpowiedź: 038.

Zadanie 5. (3 pkt)

R2.6. Uczeń dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.

R3.8. Uczeń rozwiązuje proste nierówności wymierne.

Wyznaczamy: $W(2x) = 2x(2x-2)(2x-4) = 8x(x-1)(x-2)$.

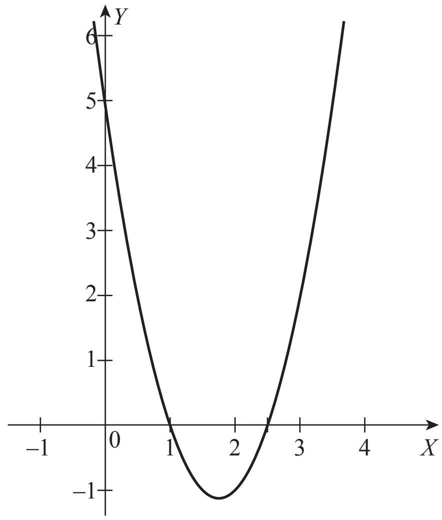
Zapisujemy nierówność:

$\frac{x(x-2)(x-4)}{8x(x-1)(x-2)} \le -\frac{1}{8}$ dla $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0, 1, 2\}$,

$\frac{x-4}{8(x-1)} \le -\frac{1}{8}$,

$\frac{2x-5}{8(x-1)} \le 0$,

$2(x-2{,}5)(x-1) \le 0$.



Odpowiedź: $1 < x < 2$ lub $2 < x \le 2{,}5$.

Punktacja:

1 – zapisanie nierówności w postaci $\frac{x-4}{8(x-1)} \le \frac{1}{8}$;

1 – rozwiązanie nierówności bez uwzględnienia dziedziny;

1 – uwzględnienie dziedziny nierówności.

Zadanie 6. (3 pkt)

R3.2. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

P5.1. Uczeń wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Wyznaczamy: $a_{n+1} = k(n+1)^2 - (k+6)(n+1) + 5 = kn^2 + (k-6)n - 1$.

$a_{n+1} > a_n$ dla $n \ge 1$, więc $kn > 3$ dla $n \ge 1$. Stąd $k > 3$.

Odpowiedź: $k > 3$.

Punktacja:

1 – wyznaczenie a_{n+1};

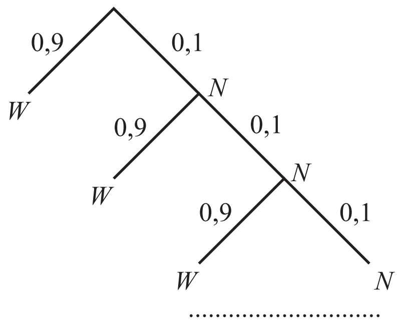
1 – zapisanie nierówności $kn > 3$ dla $n \ge 1$;

1 – uzasadnienie, że $k > 3$**.**

Zadanie 7. (5 pkt)

R10.3. Uczeń korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

P10.2. Uczeń stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.



Sytuację zadania ilustruje drzewko prawdopodobieństwa, gdzie W – wykrycie burzy, N – niewykrycie burzy przez dany (kolejny) radar meteorologiczny.

Niech n oznacza liczbę radarów meteorologicznych. Niewykrycie burzy oznacza, że nie została ona zarejestrowana przez żaden z n radarów. Prawdopodobieństwo takiej sytuacji jest równe $(0{,}1)^n$. Prawdopodobieństwo wykrycia burzy jest zatem równe (prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego) $P = 1 - (0{,}1)^n$. Z treści zadania $P = 0{,}999$. Stąd:

$1 - (0{,}1)^n = 0{,}999$

$(0{,}1)^n = 0{,}001$

$n = 3$

Dla instytutu meteorologii pracują co najmniej 3 radary.

Punktacja:

1 – sporządzenie drzewka prawdopodobieństwa;

2 – obliczenie prawdopodobieństwa niewykrycia burzy;

2 – obliczenie liczby radarów meteorologicznych.

Zadanie 8. (5 pkt)

R7.5. Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Niech α oznacza kąt BAC.
Z twierdzenia cosinusów: $16 = 36 + 64 - 96 \cos \alpha$.
Stąd $\cos \alpha = 0{,}875$.
Ponieważ $\cos 30° < 0{,}875$, więc $\cos \alpha > \cos 30°$ i $0° < \alpha < 180°$.
Skoro $\cos \alpha$ jest funkcją malejącą dla $0° < \alpha < 180°$, to $\alpha < 30°$.

Punktacja:
1 – zapisanie równania opisującego $\cos \alpha$;
2 – uzasadnienie, że $\cos \alpha > \cos 30°$;
2 – uzasadnienie, że kąt jest mniejszy od 30°.

Zadanie 9. (5 pkt)

R11.6. Uczeń stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Punkt A leży na paraboli, więc $A = (a, a^2)$, gdzie $1 \le a \le 2$.
Ponadto pochodna $f'(x) = 2x$, więc styczna jest opisana równaniem:
$y = 2a(x - a) + a^2$,
$y = 2ax - a^2$,

Obliczamy współrzędne punktu B: $2ax - a^2 = 0$, więc $x = \frac{a}{2}$. Zatem $B = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Obliczamy współrzędne punktu D: $y = 2a \cdot 2 - a^2 = 4a - a^2$, stąd $D = (2, 4a - a^2)$.

Niech $P(a)$ oznacza pole trójkąta BCD. Wtedy ze wzoru na pole trójkąta prostokątnego

$P(a) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{a}{2}\right)\left(4a - a^2\right)$ dla $1 \le a \le 2$

$P(a) = \frac{1}{4}a^3 - 2a^2 + 4a$,

$P'(a) = \frac{3}{4}a^2 - 4a + 4$.

Wyznaczamy ekstrema funkcji $P(a)$:

$\frac{3}{4}a^2 - 4a + 4 = 0$, więc $a_1 = \frac{4}{3}$ lub $a_2 = 4$ (nie należy do dziedziny).

Aby znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji $P(a)$ dla $1 \le a \le 2$, sprawdzamy wartość tej funkcji w punktach ekstremalnych (należących do przedziału) i na krańcach przedziału.

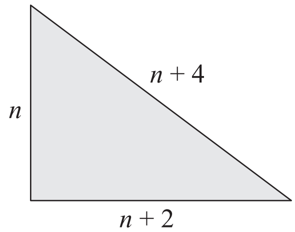
$P(1) = \frac{9}{4} = 2{,}25$, $P\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} = 2{,}37...$, $P(2) = 2$.

Odpowiedź: Trójkąt BCD ma największe pole, gdy $A = \left(1\frac{1}{3}, 1\frac{7}{9}\right)$, a najmniejsze, gdy $A = (2, 4)$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie równania stycznej;
2 – wyznaczenie pierwiastków równania $P'(a) = 0$;
2 – wyznaczenie współrzędne punktu A.

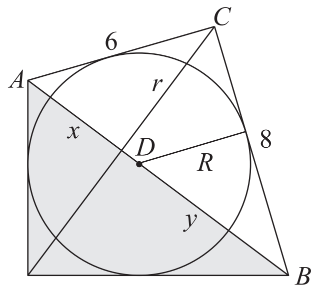
Zadanie 10. (7 pkt)

III.11.2 Uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).



Wyznaczymy długości boków trójkąta.
Z twierdzenia Pitagorasa $n^2 + (n + 2)^2 = (n + 4)^2$, stąd $n = 6$.
Zatem długości boków trójkąta są równe 6, 8, 10.
Obracający się trójkąt utworzy figurę obrotową złożoną z dwóch stożków.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Promień podstawy stożków r jest równy wysokości trójkąta prostokątnego ABC, $r = \frac{ab}{c} = \frac{48}{10}$.

Objętość powstałej figury obrotowej jest sumą objętości dwóch stożków.



$$V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 x + \frac{1}{3}\pi r^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2 c = \frac{\pi(4,8)^2 \cdot 10}{3} = \frac{384\pi}{5}$$

Promień kuli jest równy promieniowi okręgu wpisanego w deltoid. Wykorzystując wzór na promień okręgu wpisanego $R = \frac{\text{pole}}{\text{połowa obwodu}}$, otrzymamy $R = \frac{24}{7}$.

Objętość kuli: $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi\left(\frac{24}{7}\right)^3}{3} = \frac{18\,432\pi}{343}$

Stosunek objętości figur:

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{\frac{18\,432\pi}{343}}{\frac{384\pi}{5}} = \frac{240}{343}$$

Punktacja:
1 – narysowanie przekroju;
2 – obliczenie długości boków trójkąta;
2 – obliczenie objętości figury powstałej przez obrót trójkąta;
2 – wyznaczenie stosunku figur.