MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

R1.2. Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 + \frac{\log_4 5}{\log_4 6} = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} + \log_6 5 = 1 + \log_6 5 = \log_6 6 + \log_6 5 = \log_6 30.$$

Odpowiedź: D.

Zadanie 2. (1 pkt)

R9.2. Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

Ponieważ $|AB| = |BC| = 2$ i kąt ABC ma miarę $120°$, więc $|AC| = 2\sqrt{3}$.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość trójkąta ACG:

$h^2 = 4^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 13,$

$h = \sqrt{13}.$

Obliczamy pole trójkąta ACG: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{39}$.

Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (2 pkt)

P5.3. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

R5.2. Uczeń oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Wyznaczamy $a_n = 6 + 11(n-1) = 11n - 5$.
Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{na_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 11n - 8}{11n^2 - 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{11}{n} - \frac{8}{n^2}}{11 - \frac{5}{n}} = \frac{2}{11} = 0,(18).$$

Odpowiedź: 018.

Zadanie 4. (2 pkt)

P10.3. Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Wszystkich możliwych liczb naturalnych większych od 4000 i mniejszych od 6000 jest 1999. Mamy wylosować liczby, które są parzyste, czyli cyfra jedności musi być jedną z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8. Losujemy liczby większe od 4000 i mniejsze od 6000, więc na miejscu tysięcy znajduje się cyfra 4 lub 5. Co najmniej jedna cyfra musi być piątką. Żądanych liczb z 5 na miejscu dziesiątek jest $2 \cdot 10 \cdot 5 = 100$. Żądanych liczb z 5 na miejscu setek i bez 5 na miejscu dziesiątek jest $2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$. Żądanych liczb z 5 na miejscu tysięcy i bez piątki na miejscu setek i dziesiątek jest $9 \cdot 9 \cdot 5 = 405$.

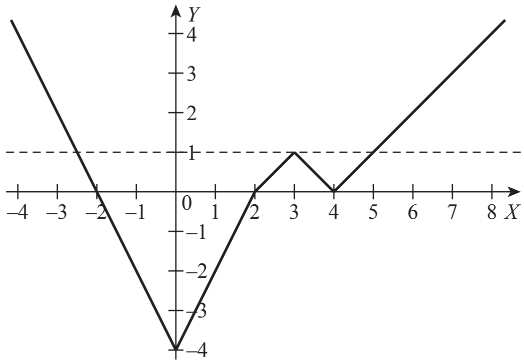
Obliczamy prawdopodobieństwo: $\frac{100 + 90 + 405}{1999} = \frac{595}{1999} = 0,29764...$

Odpowiedź: 2976.

Zadanie 5. (3 pkt)

R4.1. Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$, $y = cf(x)$, $y = f(cx)$.

Rysujemy wykres funkcji.
Z wykresu odczytujemy, że $f(x) = m$ ma dokładnie trzy rozwiązania, gdy $m = 0$ lub $m = 1$.
Odpowiedź: $m = 0$ lub $m = 1$.
Punktacja:
2 – naszkicowanie wykresu funkcji;
1 – stwierdzenie, dla jakich m równanie ma dokładnie trzy rozwiązania.



Zadanie 6. (3 pkt)

P6.4. Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi.

R2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 - b^3$.

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów i kwadratów oraz wyciągając wspólny czynnik przed nawias, otrzymujemy:
$(\sin x - \cos x)\left[2(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) - 1\right] < 0.$
Z „jedynki trygonometrycznej" oraz ze wzoru na sinus podwójnego kąta otrzymujemy równoważną nierówność:
$(\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) < 0.$
Ponieważ $0° < x < 45°$, więc $\sin x < \cos x$, $1 + \sin 2x > 0$, skąd $(\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) < 0$.

Punktacja:
1 – zastosowanie wzoru na różnicę sześcianów;
1 – przekształcenie nierówności do postaci prostego iloczynu;
1 – uzasadnienie, że iloczyn jest liczbą ujemną.

Zadanie 7. (5 pkt)

R7.1. Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Niech a i b oznaczają długości podstaw trapezu, c – długość ramienia. Z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt otrzymujemy $a + b = 2c$, czyli $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Ponieważ O jest środkiem okręgu wpisanego w trapez, więc półproste AO i DO są dwusiecznymi kątów BAD i ADC, odpowiednio. Zatem

$$\sphericalangle OAD + \sphericalangle ODA = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Zatem $\sphericalangle AOD = 180° - (\sphericalangle OAD + \sphericalangle ODA) = 90°$, czyli trójkąt AOD jest trójkątem prostokątnym.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOD otrzymujemy

$$|OA|^2 + |OD|^2 = c^2 = \frac{(a+b)^2}{4}, \text{ czyli}$$

$$\sqrt{|OA|^2 + |OD|^2} = \frac{a+b}{2} = \frac{|AB| + |CD|}{2}.$$

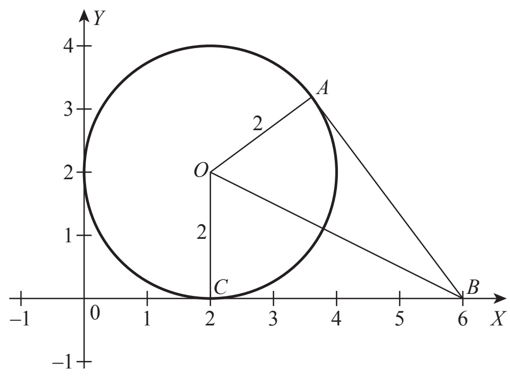
Punktacja:
1 – wyznaczenie zależności c od a i b;
2 – uzasadnienie, że trójkąt AOD jest prostokątny;
2 – uzasadnienie, że szukana wielkość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Zadanie 8. (5 pkt)

III.10.3. Uczeń korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.

R8.5. Uczeń posługuje się równaniem okręgu.

Niech $C = (2, 0)$. Wtedy oś OX jest styczna do okręgu w punkcie C. Ponadto $|BC| = 4$, więc z twierdzenia o stycznych do okręgu $|AB| = 4$.



Równanie okręgu o środku $O = (2, 2)$ i promieniu $r = 2$ ma postać: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
Niech $A = (a, b)$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$. Punkt A leży na okręgu, więc $(a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 4$.
Ponadto $|AB| = 4$, więc $(a - 6)^2 + (b - 0)^2 = 16$.
Rozwiązujemy układ równań:
$(a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 4$
$(a - 6)^2 + b^2 = 16$.
Odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymujemy
$8a - 4b = 16$. Stąd $b = 2a - 4$.
Podstawiając b do drugiego równania, otrzymujemy
$5a^2 - 28a + 36 = 0$. Stąd $a_1 = 2$ i $a_2 = 3{,}6$.
Zatem $b_1 = 0$ (nie spełnia warunków zadania) i $b_2 = 3{,}2$.
Odpowiedź: $A = (3{,}6,\ 3{,}2)$.
Punktacja:
1 – uzasadnienie, że $|AB| = 4$;
2 – zapisanie układu równań;
2 – rozwiązanie układu równań i podanie prawidłowej odpowiedzi.

Zadanie 9. (5 pkt)

P3.7. Uczeń korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$.

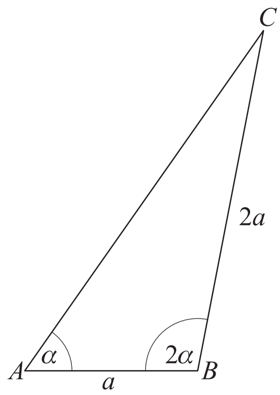
R3.1. Uczeń stosuje wzory Viète'a.

Pierwszym pierwiastkiem jest $x_1 = -1$.
Zatem musimy wyznaczyć, dla jakich wartości parametru a równanie $x^2 - (a + 1)x + a = 0$ ma dwa różne rzeczywiste pierwiastki x_2 i x_3 takie, że x_2 i x_3 są różne od (-1) i $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$, czyli $x_2^2 + x_3^2 = 5$.
Obliczamy $\Delta = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$.
Aby istniały dwa różne rzeczywiste pierwiastki, $\Delta > 0$, czyli $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$.
Ponadto ze wzorów Viète'a: $x_2^2 + x_3^2 = (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = (a + 1)^2 - 2a = a^2 + 1$.
Rozwiązujemy równanie: $a^2 + 1 = 5$, czyli $a_1 = -2$ lub $a_2 = 2$.
Oba pierwiastki są różne od 1, więc istnieją dla nich dwa różne rozwiązania.
Sprawdzamy, czy którymś z rozwiązań nie jest (-1).
Podstawiamy $a_1 = -2$. Wówczas $x^2 + x - 2 = 0$, czyli $x_2 = -2$ i $x_3 = 1$.
Podstawiamy $a_2 = 2$. Wówczas $x^2 - 3x + 2 = 0$, czyli $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.
W obu przypadkach rozwiązania są różne od (-1).
Odpowiedź: $a = -2$ lub $a = 2$.
Punktacja:
1 – znalezienie wyróżnika i sprawdzenie, kiedy jest większy od zera;
2 – zapisanie i rozwiązanie równania na sumę kwadratów pierwiastków równania wielomianowego;
2 – sprawdzenie, czy rozwiązania równania kwadratowego są różne od (-1).

Zadanie 10. (7 pkt)

R7.5. Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Oznaczmy kąty i boki tak jak na rysunku.



Z twierdzenia sinusów: $\frac{|AC|}{\sin 2\alpha} = \frac{|BC|}{\sin\alpha}$. Ponieważ $|BC| = 2|AB|$, więc

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos\alpha$, czyli

$\frac{|AC|^2}{|AB|^2} = 16\cos^2\alpha$.

Z twierdzenia cosinusów:
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos 2\alpha$
$|AC|^2 = 5|AB|^2 - 4|AB|^2 \cdot \cos 2\alpha$

$\frac{|AC|^2}{|AB|^2} = 5 - 4 \cdot \cos 2\alpha$

Korzystając z dwóch wzorów na stosunek $\frac{|AC|^2}{|AB|^2}$, otrzymujemy

$16\cos^2\alpha = 5 - 4\cos 2\alpha$
$16\cos^2\alpha = 5 - 4(2\cos^2\alpha - 1)$

$\cos^2\alpha = \frac{3}{8}$.

Zatem $\frac{|AC|^2}{|AB|^2} = 16\cos^2\alpha = 6$, czyli $|AC|^2 = 6|AB|^2$.

Punktacja:

2 – zastosowanie twierdzenia sinusów lub cosinusów do wyznaczenia $\frac{|AC|}{|AB|}$;

2 – zapisanie równania na $\cos\alpha$;
3 – uzasadnienie, że $|AC|^2 = 6|AB|^2$.