MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

R4.1. Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$.[1]

P4.3. Uczeń odczytuje z wykresu własności funkcji.

Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = -2$ równą $f(-2) = -1$. Wartościami funkcji na krańcach przedziału są $f(-3) = 0$ oraz $f(3) = 4$. Zatem szukanym zbiorem wartości jest $\langle -1, 5)$.
Odpowiedź: A.

Zadanie 2. (1 pkt)

R6.5. Uczeń stosuje wzory na sumę i różnicę sinusów i cosinusów.

Przekształcamy $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x = 4\sin x \cos^2 x$.
Ponieważ $\sin x = 0{,}25$, więc $\cos^2 x = 1 - 0{,}25^2 = 0{,}9375$.
Zatem $\sin 3x + \sin x = 0{,}9375$.
Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (2 pkt)

R7.1 stosuje twierdzenie charakteryzujące czworokąty opisany na okręgu.

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Korzystamy z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i otrzymujemy: $|AB| = 3 + 3 - 2 = 4$. Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wysokość trapezu $h^2 = 9 - 1 = 8$, czyli $h = 2\sqrt{2}$. Promień okręgu jest równy połowie wysokości, czyli $r = \sqrt{2}$.

Odpowiedź: 141.

Zadanie 4. (2 pkt)

P5.4. Uczeń stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

R5.2. Uczeń oblicza granicę ciągów.

Do obliczenia poniższych sum skorzystamy, ze wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$a_n = 3 + 6 + ... + 3n = \frac{3}{2}(n + 1)n$$

$$b_n = (1 + 2 + ... + 3n) - (3 + 6 + ... + 3n) = \frac{3}{2}(3n + 1)n - \frac{3}{2}(n + 1)n = 3n^2$$

Stąd $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$ przy $n \to \infty$.

Odpowiedź: 050.

Zadanie 5. (3 pkt)

R8.4. Uczeń posługuje się równaniem okręgu.

R3.9. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Środkami okręgów są punkty $(0, 0)$ i $(3, -4)$, a promieniami $|m - 1|$ i $2|m|$, odpowiednio. Aby okręgi były styczne zewnętrznie, odległość między ich środkami musi być równa sumie długości ich promieni. Zatem otrzymujemy równanie: $|m - 1| + 2|m| = 5$. Rozwiązując to równanie, otrzymujemy, że $m = -1\frac{1}{3}$ lub $m = 2$.

[1] Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P (R) – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego (rozszerzonego) szkoły ponadgimnazjalnej.

Punktacja:
1 – wyznaczenie środki i promieni okręgów;
1 – ułożenie równania;
1 – rozwiązanie równania.

Zadanie 6. (3 pkt)

R2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia $a^3 \pm b^3$.

$$x^{18} + \frac{1}{x^{18}} = \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)\left(x^{12} - 1 + \frac{1}{x^{12}}\right) = \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)\left(\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right)^2 + 1\right) > 2\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right).$$

Punktacja:
1 – zastosowanie wzoru $a^3 \pm b^3$.
2 – uzasadnienie nierówności.

Zadanie 7. (5 pkt)

R5.3. Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumę.

R6.6. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

Z warunku na ciąg geometryczny mamy:
$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = 0{,}5$
$\cos 2x = 0{,}5$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

Iloraz tego ciągu jest równy:

$$q = \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$$

Aby szereg był zbieżny, wartość bezwzględna jego ilorazu musi być mniejsza od jeden, czyli

$$|\cos x - \sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sprawdzamy, dla jakich x nierówność ta jest spełniona.

Dla $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ otrzymujemy

$$|\cos x_1 - \sin x_1| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dla $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ otrzymujemy

$$|\cos x_2 - \sin x_2| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dla $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ otrzymujemy

$$|\cos x_3 - \sin x_3| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dla $x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ otrzymujemy

$$|\cos x_4 - \sin x_4| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k = 0, 1, -1, 2, -2, ...$

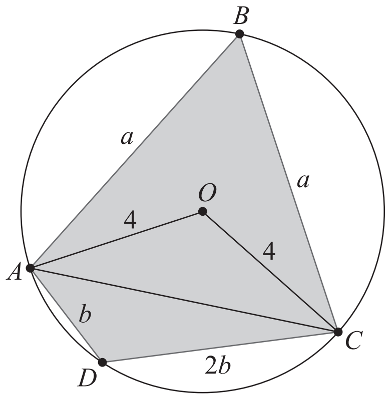
Punktacja:
1 – ułożenie równania;
2 – rozwiązanie równania.
2 – wyznaczenie wartości x, dla których szereg jest zbieżny.

Zadanie 8. (5 pkt)

R7.1. Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąt wpisany w okrąg.

R7.5. Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów.

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku. Skoro kąt ADC ma miarę $120°$, to z twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie otrzymujemy, że kąt ABC ma miarę $60°$.
Ponadto trójkąt ACB jest równoramienny, więc kąty BAC i ACB są równe i mają miarę $60°$. Zatem trójkąt ACB jest równoboczny, czyli $|AC| = a$.
Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartym na tym samym łuku otrzymujemy, że kąt AOC ma miarę $120°$. Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACO, mamy $a^2 = 48$, czyli $a = 4\sqrt{3}$.
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD otrzymujemy $48 = 5b^2 + 2b^2$, czyli $b = \frac{4}{7}\sqrt{21}$.



Odpowiedź: Obwód czworokąta wynosi $8\sqrt{3} + \frac{12}{7}\sqrt{21}$.

Punktacja:
2 – wyznaczenie wartości a.
2 – wyznaczenie wartości b.
1 – wyznaczenie obwodu.

Zadanie 9. (5 pkt)

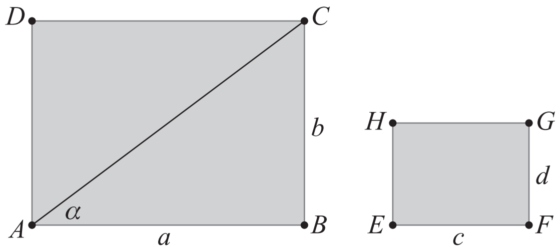
R7.4. Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne, wykorzystuje ich własności.

R3.3. Uczeń rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych.

Wprowadźmy oznaczenia $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|EF| = c$, $|FG| = d$, α oznacza kąt BAC. Skoro prostokąty są podobne, to stosunek b do a jest taki sam jak stosunek d do c. Stosunek ten jest równy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

Wobec tego $b = \frac{3}{4}a$ oraz $d = \frac{3}{4}c$.

Pole prostokąta $ABCD$ jest o 36 większe od pola prostokąta $EFGH$, więc $\frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}c^2 + 36$.



Obwód prostokąta $ABCD$ jest o 14 większy od obwodu prostokąta $EFGH$, więc $\frac{7}{2}a = \frac{7}{2}c + 14$.

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} a^2 = c^2 + 48 \\ a = c + 4 \end{cases}$$

Podstawiając a z drugiego równania do pierwszego, otrzymujemy: $c^2 + 8c + 16 = c^2 + 48$, czyli $c = 4$ oraz $a = 8$.

Zatem skala podobieństwa prostokątów wynosi: $k = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

Punktacja:
1 – uzasadnienie, że stosunek d do c jest taki sam jak stosunek b do a;
1 – wyznaczenie stosunku b do a;
1 – zapisanie układu równań;
1 – rozwiązanie układu równań;
1 – podanie skali podobieństwa.

Zadanie 10. (7 pkt)

R3.1. Uczeń stosuje wzory Viète'a.

R3.2. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Równanie ma dwa różne rzeczywiste pierwiastki, więc $\Delta > 0$, czyli
$m^2 - 4m - 4 > 0$, więc $m < 2 - 2\sqrt{2}$ lub $m > 2 + 2\sqrt{2}$.
Oba pierwiastki mają być dodatnie, czyli ich suma i iloczyn są dodatnie. Korzystając ze wzorów Viète'a, otrzymujemy:
$x_1 + x_2 > 0$ i $x_1 x_2 > 0$,
$m > 0$ i $m + 1 > 0$, czyli $m > 0$.
Nierówność $x_1^3 + x_2^3 > x_1 + x_2$ przekształcamy do postaci równoważnej
$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > x_1 + x_2$
$(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) > x_1 + x_2$
Ze wzorów Viète'a mamy:
$m(m^2 - 3m - 3) > m$
$m(m^2 - 3m - 4) > 0$
$m(m - 4)(m + 1) > 0$
$-1 < m < 0$ lub $m > 4$.
Uwzględniając wszystkie warunki, otrzymujemy $m > 2 + 2\sqrt{2}$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie, dla jakich wartości m równania ma dwa różne rozwiązania;
2 – wyznaczenie, dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa dodatne pierwiastki;
3 – wyznaczenie, dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania spełniają podaną nierówność;
1 – wyznaczenie wartości parametru m spełniające wszystkie warunki zadania.