MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

P1.4. Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych[1].

$$\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)^3\left(a\sqrt[3]{a}\right)^2}{\sqrt[3]{a^4}}\right)^6 = \left(\frac{a^{\frac{3}{2}}a^{-3}a^2a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^6 = \left(\frac{a^{\frac{7}{6}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^6 = \left(a^{-\frac{1}{6}}\right)^6 = a^{-1}$$

$$a^{-1} = \frac{5}{13}$$

$$a = \frac{13}{5}$$

Odpowiedź: C.

Zadanie 2. (1 pkt)

R5.3. Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

R3.9. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| + \left|\frac{x-2}{4}\right| + \left|\frac{x-2}{8}\right| + ... = 4$$

$$a_1 = \left|\frac{x-2}{2}\right|, \ q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\left|\frac{x-2}{2}\right|}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

$|x - 2| = 4$

$x = 6$ lub $x = -2$

Odpowiedź: A.

Zadanie 3. (2 pkt)

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia.

P1.6. Uczeń wykorzystuje definicję logarytmu.

R1.1. Uczeń wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej.

$$\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}\right) = \log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{(2+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}\right) =$$

$$\log_{\sqrt{5}}\left(\left|2+\sqrt{5}\right| + \left|3-\sqrt{5}\right| + 2\right) = \log_{\sqrt{5}}\left(2+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right) = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$$

2	0	0

[1] Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P (R) – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego (rozszerzonego) szkoły ponadgimnazjalnej.

Zadanie 4. (2 pkt)

R11.2. Uczeń oblicza pochodne funkcji wymiernych.

$$f(x) = \frac{(2x+1)^2}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 16x - 9}{(x-2)^2}$$

$$\frac{f'(1)}{2f(3)} = \frac{-21}{98} = -0{,}21428$$

2	1	4

Zadanie 5. (3 pkt)

R10.1. Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami.

R5.2. Uczeń oblicza granice ciągów.

$$\sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+1}{n}}{\frac{2n}{1\cdot 2} + \frac{2n}{2\cdot 3} + \frac{2n}{3\cdot 4} + \ldots \frac{2n}{(n-1)\cdot n}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)}} =$$

$$\sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n \cdot \frac{n-1}{n}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Punktacja:
1 – wyznaczenie i zapisanie licznika w postaci $n + 1$;
1 – doprowadzenie mianownika do postaci $2(n - 1)$;
1 – obliczenie wartości wyrażenia.

Zadanie 6. (3 pkt)

V. Rozumowanie i argumentacja. Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność[2].

Z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{x^3 + \frac{20}{x} + \frac{20}{x} + \frac{20}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{20}{x} \cdot \frac{20}{x} \cdot \frac{20}{x}}$$

$$x^3 + \frac{20}{x} + \frac{20}{x} + \frac{20}{x} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{20\cdot 20\cdot 20} > 4 \cdot \sqrt[4]{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9} = 4 \cdot 9 = 36,$$

czyli

$$x^3 + \frac{60}{x} > 36$$

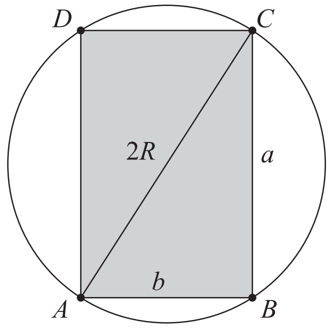
Punktacja:
3 – poprawne uzasadnienie prawdziwości nierówności.

[2] Uczeń może wykorzystać rachunek różniczkowy.

Zadanie 7. (5 pkt)

P3.3. Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.



Mamy: $\pi R^2 = 2ab$ i $a^2 + b^2 = 4R^2$,
czyli

$$\pi\frac{a^2+b^2}{4} = 2ab$$

$$\pi a^2 - 8ab + \pi b^2 = 0 \quad |: b^2$$

$$\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) + \pi = 0$$

Podstawiając pomocniczą niewiadomą i rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi},\quad \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}.$$

Poszukujemy stosunku boku dłuższego do krótszego, więc $\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}$.

Punktacja:

1 – wyznaczenie i zapisanie warunku $\pi\frac{a^2+b^2}{4} = 2ab$;

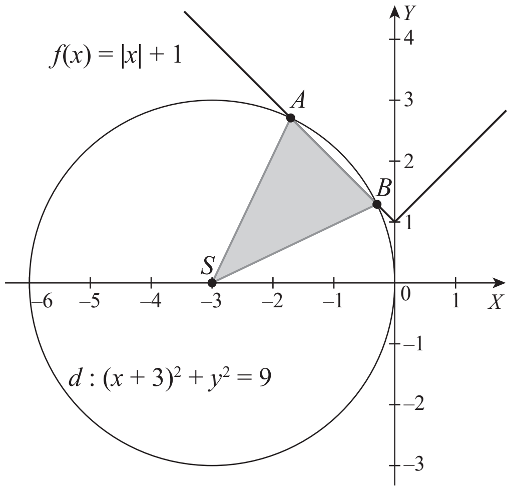
2 – doprowadzenie do równania kwadratowego $\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) + \pi = 0$;

2 – wyznaczenie szukanego stosunku długości boków prostokąta $\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}$.

Zadanie 8. (5 pkt)

R8.5. Uczeń posługuje się równaniem okręgu.

R8.6. Uczeń wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu.



Wyznaczamy punkty wspólne krzywych.

$$\begin{cases} y = |x| + 1 \\ (x+3)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Można zauważyć, że rozwiązanie istnieje tylko dla $x < 0$.
Po przekształceniach doprowadzamy do równania kwadratowego $2x^2 + 4x + 1 = 0$, stąd

$$\text{A:}\begin{cases} x = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2} \end{cases}\qquad \text{B:}\begin{cases} x = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Wyznaczamy długość odcinków $a = AB = 2$ oraz $b = AS = BS = 3$ (promień okręgu).
Pole trójkąta ABS obliczamy ze wzoru:

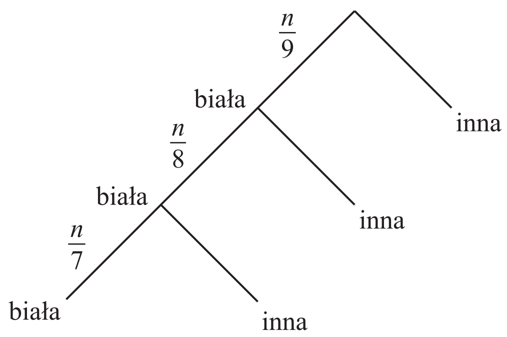
$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)} = \sqrt{4\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 2\sqrt{2}.$$

Punktacja:
1 – wykonanie rysunku;
2 – wyznaczenie współrzędnych punktów wspólnych A i B obu krzywych;
2 – obliczenie pola trójkąta.

Zadanie 9. (5 pkt)

R10.3. Uczeń korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

R3.6. Uczeń rozwiązuje równania wielomianowe.



n – liczba kul białych $0 < n \le 9$ i $n \in \boldsymbol{N}$;
A – zdarzenie, że trzy wylosowane kule są białe.
Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$P(A) = \frac{n}{9} \cdot \frac{n-1}{8} \cdot \frac{n-2}{7}$$

Z warunku zadania:

$$\frac{n}{9} \cdot \frac{n-1}{8} \cdot \frac{n-2}{7} = \frac{2}{3}$$

$n(n-1)(n-2) = 336$
$n^3 - 3n^2 + 2n - 336 = 0$
$(n-8)(n^2 + 5n + 42) = 0$
$n = 8$ $\qquad \Delta < 0$
W urnie było zatem 8 kul białych.

Punktacja:

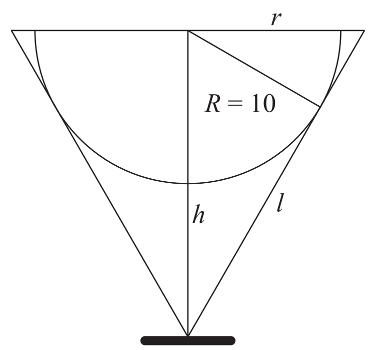
1 – narysowanie drzewka, zapisanie prawdopodobieństwa całkowitego $P(A) = \frac{n}{9} \cdot \frac{n-1}{8} \cdot \frac{n-2}{7}$;

2 – wykorzystanie warunku z zadania i doprowadzenie do równania trzeciego stopnia;
2 – wyznaczenie liczby kul białych.

Zadanie 10. (7 pkt)

R11.6. Uczeń stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Z porównania pól trójkąta prostokątnego:



$$\frac{1}{2} r \cdot h = \frac{1}{2} R \cdot l$$

$$r \cdot h = 10 \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$r^2 h = 100r^2 + 100h^2$$

$$r^2 = \frac{100h^2}{h^2 - 100}$$

Po podstawieniu do wzoru na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{100h^2}{h^2 - 100} h$$

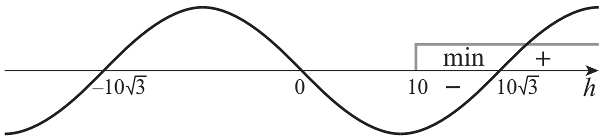
$$V = \frac{100\pi}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - 100}$$

Funkcja opisuje objętość stożka w zależności od jego wysokości h, przy czym $h \in (10, \infty)$.
Wyznaczamy najmniejszą wartość tej funkcji.

$$V' = \frac{100\pi}{3} \cdot \frac{h^4 - 300h^2}{\left(h^2 - 100\right)^2}$$

$V' = 0 \Leftrightarrow h^4 - 300h^2 = 0$
$\qquad h^2(h^2 - 300) = 0$

$h = 0, \ h = 10\sqrt{3}, \ h = -10\sqrt{3}$



Ostatecznie objętość kielicha jest najmniejsza dla $h = 10\sqrt{3}$ i $r = 5\sqrt{6}$

i jest równa $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 150 \cdot 10\sqrt{3} = 500\pi\sqrt{3}$.

Punktacja:

1 – wskazanie zależności r od h;
2 – wyznaczenie wzoru na objętość w zależności od jednej zmiennej;
2 – obliczenie pochodnej funkcji opisującej objętość stożka i wyznaczenie ekstremów;
2 – wyznaczenie wymiarów i objętości stożka.