MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (1 pkt)

R1.2. Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu[1].

$$\log_8 3 + \log_{64} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 8} + \frac{\log_2 3}{\log_2 64} = \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{1}{6}\log_2 3 = \frac{1}{2}\log_2 3 = \log_2 \sqrt{3}$$

Odpowiedź: D.

Zadanie 2. (1 pkt)

R5.1. Uczeń wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym.

Skoro $x_1 = 100$, więc
$x_2 = 200 - 90 = 110$
$x_3 = 220 - 90 = 130$
$x_4 = 260 - 90 = 170$
Odpowiedź: C.

Zadanie 3. (2 pkt)

R10.2. Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{12}$$

Zatem

$$P(A|B) = \frac{1}{4} = 0,25$$

2	5	0

Zadanie 4. (2 pkt)

R11.4. Uczeń oblicza granicę funkcji.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - (p+1)x + p}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-p)(x-1)}{x-1} = 1 - p.$$

$1 - p = \frac{1}{3}$, więc $p = \frac{2}{3} = 0,(6)$

0	6	6

Zadanie 5. (3 pkt)

R.V. Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia.

Niech $x > y > 0$ będą bokami szukanych kwadratów. Wówczas
$x^2 - y^2 = 15$
$(x - y)(x + y) = 15$

[1] Symbol III oznacza wymaganie z podstawy programowej dla III etapu edukacyjnego (gimnazjum), P (R) – część podstawy programowej dla zakresu podstawowego (rozszerzonego) szkoły ponadgimnazjalnej.

Ponieważ x i y są liczbami całkowitymi dodatnimi i $x > y$, więc $x - y$ i $x + y$ również są liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $x - y < x + y$. Liczbę 15 można rozłożyć na iloczyn dwóch liczb całkowitych dodatnich, z których pierwsza liczba jest mniejsza od drugiej tylko na dwa sposoby: $1 \cdot 15$ oraz $3 \cdot 5$. Stąd otrzymujemy dwa układy równań:
$x - y = 1$
$x + y = 15$
Wtedy $x = 8$ i $y = 7$.
$x - y = 3$
$x + y = 5$
Wtedy $x = 4$ i $y = 1$.
Odpowiedź: Parami kwadratów spełniającymi warunki zadania są jedynie kwadraty o bokach 8 i 7 oraz 4 i 1.

Punktacja:
1 – znalezienie par 8 i 7 oraz 4 i 1, ale z toku rozumowania nie wynika, że są to jedyne pary;
2 – z toku rozumowania wynika, że znalezione pary są jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania.

Zadanie 6. (3 pkt)

R10.1. Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

P3.10. Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych.

Niech A oznacza zdarzenie, że z urny wylosowano dwie kule czarne, a x oznacza liczbę kul czarnych. Z treści zadania wynika, że x jest liczbą całkowitą większą lub równą 2. Wtedy

$$P(A) = \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{(x+4)(x+3)}{2}}$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+4)(x+3)} = \frac{1}{7}$$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

$x_1 = -\frac{2}{3}$, sprzeczność

lub $x_2 = 3$
Odpowiedź: W urnie są 3 kule czarne.

Punktacja
1 – ułożenie równania;
1 – rozwiązanie równania;
1 – obliczenie, ile kul czarnych znajduje się w urnie.

Zadanie 7. (5 pkt)

R8.4. Uczeń oblicza odległość punktu od prostej.

R3.9. Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B: $y = x - 2$. Możemy zapisać to równanie w postaci ogólnej $x - y - 2 = 0$.
Punkt C leży na prostej $y = -x + 2$, więc $C = (x, 2 - x)$.
Wysokość możemy wyznaczyć ze wzoru na odległość punktu od prostej

$$h = \frac{|x - (2 - x) - 2|}{\sqrt{2}}.$$

Z drugiej strony $h = 2\sqrt{2}$, więc

$$\frac{|x - (2 - x) - 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$|2x - 4| = 4$

$x - 2 = 2$ lub $x - 2 = -2$
$x = 4$ lub $x = 0$
Odpowiedź: Szukanym punktem jest $C = (4, -2)$ lub $C = (0, 2)$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie równania prostej AB;
1 – ułożenie równania;
2 – rozwiązanie równania;
1 – podanie współrzędnych punktu C.

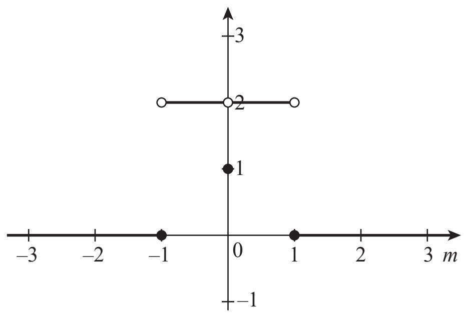
Zadanie 8. (5 pkt)

R11.5. Uczeń znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych.

R4.4. Uczeń szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami.

Funkcja f ma ekstrema w punktach, w których pierwsza pochodna się zeruje i zmienia znak.
$f'(x) = 3mx^2 - 6x + 3m$
Dla $m = 0$ pochodna $f'(x) = -6x$ jest funkcją liniową mającą jedno miejsce zerowe $x = 0$ i funkcja zmienia znak przechodząc przez ten punkt. Zatem funkcja $f(x)$ ma jedno ekstremum.
Dla $m \neq 0$ pochodna $f'(x) = 3mx^2 - 6x + 3m$ jest funkcją kwadratową, dla której $\Delta = 36(1 - m^2)$.
Ma ona dwa różne rozwiązania, gdy $\Delta > 0$, czyli
$1 - m^2 > 0$
$-1 < m < 0$ oraz $0 < m < 1$
Funkcja przechodząc przez te miejsca zerowe zmienia znak, więc funkcja $f(x)$ ma wtedy dokładnie dwa ekstrema.

Jeśli $\Delta = 0$, wówczas $f'(x)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe, ale przechodząc przez nie pochodna nie zmienia znaku, więc $f(x)$ nie ma ekstremów.
Gdy $\Delta < 0$, wtedy $f'(x)$ nie ma miejsc zerowych, czyli $f(x)$ nie posiada ekstremów.
Podsumowując $f(x)$, widzimy, że nie ma ekstremów, gdy $\Delta \leq 0$, czyli
$1 - m^2 \leq 0$
$m \leq -1$ lub $m \geq 1$



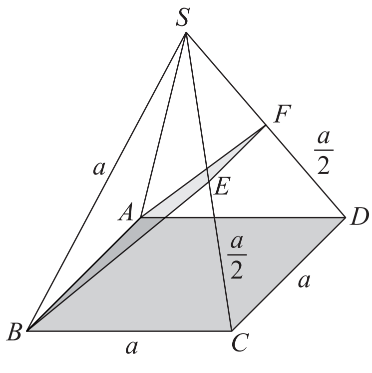
Punktacja:
1 – wyznaczenie pochodnej funkcji $f(x)$;
1 – uzasadnienie, że dla $m = 0$ jest jedno ekstremum;
1 – wyznaczenie wartości m, dla których są dwa ekstrema;
1 – wyznaczenie wartości m, dla których nie ma ekstremum;
1 – naszkicowanie wykresu funkcji.

Zadanie 9. (5 pkt)

R9.2. Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

P7.3. Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

III.10.7. Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.

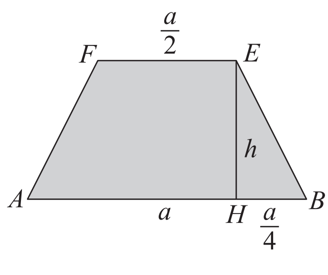


Z podobieństwa trójkątów CDS i EFS otrzymujemy, że $|EF| = \dfrac{a}{2}$.

Trójkąt BCS jest trójkątem równobocznym, czyli BE jest wysokością tego trójkąta, zatem $|BE| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Zauważmy, że przekrój $ABEF$ jest trapezem równoramiennym.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta HBE otrzymujemy

$h^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{16}$, czyli $h = \dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.



Zatem pole trapezu *ABEF* jest równe:

$$P = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{11}}{16}.$$

Punktacja:
1 – wyznaczenie $|EF|$;
1 – wyznaczenie $|BE|$;
1 – spostrzeżenie, że przekrój jest trapezem równoramiennym;
1 – wyznaczenie wysokości trapezu;
1 – wyznaczenie pola trapezu.

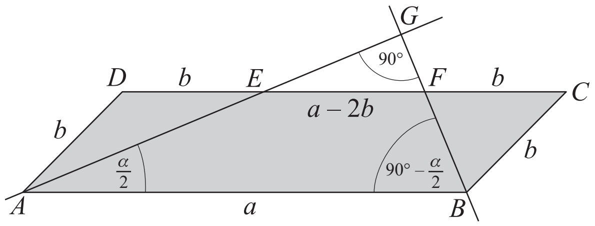
Zadanie 10. (7 pkt)

R.V. Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

P2.1. Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia.

R6.5. Uczeń stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.

Skoro $AB \parallel CD$, więc miara kąta *AED* jest równa mierze kąta *EAB*.



Zatem kąty *EAD* i *AED* mają miarę $\frac{\alpha}{2}$, czyli trójkąt *AED* jest równoramienny, więc
$|DE| = |AD| = b$.
Podobnie uzasadniamy, że $|CF| = |BC| = b$.
Skoro $a > 2b$, to punkt *G* jest na zewnątrz równoległoboku *ABCD* oraz $|EF| = a - 2b$.

Skoro kąt *ABF* ma miarę $90° - \frac{\alpha}{2}$, to kąt *EGF* jest kątem prostym.

Kąt *GEF* jest równy kątowi *EAB*, czyli kąt *GEF* ma miarę $\frac{\alpha}{2}$.

Z definicji sinusa i cosinusa dla trójkąta prostokątnego *EFG* otrzymujemy

$$|FG| = (a - 2b)\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$|EG| = (a - 2b)\cos\frac{\alpha}{2}$$

Zatem obwód trójkąta *EFG* jest równy $(a - 2b)\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ oraz $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

Ponieważ $\left(\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \geq 0$, więc

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \geq 2\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2\sin\alpha}.$$

Zatem $(a - 2b)\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = (a - 2b)\left(1 + \sqrt{2\sin\alpha}\right)$.

Punktacja:
1 – wyznaczenie $|EF|$;
1 – uzasadnienie, że kąt *AGB* jest prosty;
2 – wyznaczenie obwodu trójkąta *EFG*;
3 – uzasadnienie nierówności.