MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 1. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (0-1) Odpowiedź: A

R5.2 Uczeń oblicza granice ciągów.

Ponieważ (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 3$, więc $a_n - a_{n+1} = -3$, a zatem $b_n = -3n$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\left(-1 + \frac{2}{3n}\right) = -1.$$

Zadanie 2. (0-1) Odpowiedź: D

R 1.2. Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu

Obliczamy:

$$\log_2 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{9} = \log_2 9 + \frac{\log_2 \frac{1}{9}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2 9 + \log_2 9 = 4\log_2 3.$$

Zadanie 3. (0-2) Odpowiedź: 222

R 11.2. Uczeń oblicza pochodne funkcji wymiernych;

R 11.3. Uczeń korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;

Wyznaczamy pochodną funkcji $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2+2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2} = \dfrac{4-2x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $f'(1) = \dfrac{2}{9} = 0,(2)$.

Zadanie 4. (0-2) Odpowiedź: 944

R 7.5 Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów

Niech γ oznacza kąt przy wierzchołku C.

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy $16 = 18 - 18 \cos\gamma$, czyli $\cos\gamma = \dfrac{1}{9}$.

Z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy $\sin\gamma = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

Zatem $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = 4\sqrt{5} = 8,944...$

Zadanie 5. (0-3)

R 3.3 Uczeń rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych;

R 8.7 Uczeń oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę.

$v + 2w = [a^2 + 2b^2, 2a + 2b]$.

$[a^2 + 2b^2, 2a + 2b] = [1, 2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + 2b^2 = 1$ i $2a + 2b = 2$.

Z drugiego równania wyznaczamy $a = 1 - b$ i wstawiamy do pierwszego równania

$(1 - b)^2 + 2b^2 = 1$

$3b^2 - 2b = 0$

$b(3b - 2) = 0$

Zatem $b = 0$ i $a = 1$ lub $b = \frac{2}{3}$ i $a = \frac{1}{3}$.

Punktacja

1 – ułożenie układu równań na a i b.

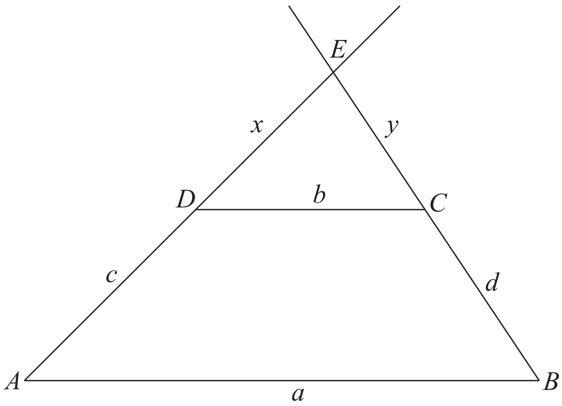
2 – rozwiązanie układu równań.

Zadanie 6. (0-3)

R 7.2 Uczeń stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku. Kąt CED jest kątem prostym.

Ponieważ $AB \| CD$, więc z twierdzenia Talesa



$\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a}$ oraz $\frac{y}{y+d} = \frac{b}{a}$, czyli

$x = \frac{bc}{a-b}$ oraz $y = \frac{bd}{a-b}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDE mamy

$$b^2 = \frac{(bc)^2 + (bd)^2}{(a-b)^2}$$

$b^2(a - b)^2 = b^2(c^2 + d^2)$

$(a - b)^2 = c^2 + d^2$

Puktacja:

1 – wyznaczenie długości x i y

1 – zapisanie równości wynikającej z twierdzenia Pitagorasa

1 – dokończenie przekształceń

Zadanie 7. (0-5)

R 6.6 Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne

$\sin 2x + \sin 3x + \cos 4x = 0$

$(\sin 2x + \cos 4x) + \sin 3x = 0$

$2\sin 3x \cos x + \sin 3x = 0$

$\sin 3x(2\cos x + 1) = 0$

$\sin 3x = 0$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$.

Wyznaczamy pierwiastki należące do przedziału $\langle 50\pi, 100\pi \rangle$:

$x = \frac{k\pi}{3}$ dla $k = 150, 151, ..., 300$,

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ dla $k = 25, 26, ..., 49$,

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ dla $k = 25, 26, ..., 49$.

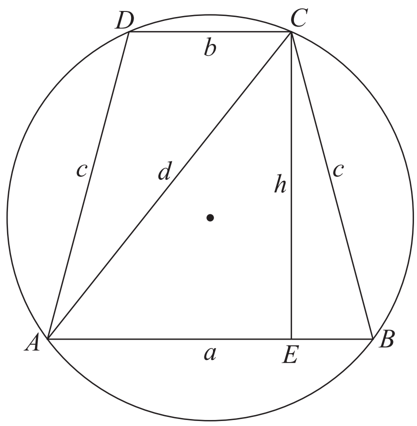
Punktacja:
2 – zapisuje lewą stronę nierówności w formie iloczynu
1 – wyznacza wszystkie pierwiastki równania
2 – wyznacza pierwiastki należące do zbioru $\langle 50\pi, 100\pi \rangle$

Zadanie 8. (0-5)

R 3.3 Uczeń rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych;

R 7.1. Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku. Ponadto niech r oznacza promień okręgu wpisanego w trapez, natomiast R promień okręgu opisanego na trapezie.



W trapez ten można wpisać okrąg, więc $a + b = 2c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Ponadto $|EB| = \frac{a-b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BEC mamy
$h^2 + |EB|^2 = c^2$. Stąd $h = \sqrt{ab}$.
Ponieważ $h = 2r$, więc $h = 4$.
Ze wzoru na pole trapezu: $P = 2(a + b)$.
Z powyższych rozważań i danych z treści zadania otrzymujemy układ równań:
$ab = 16$ i $a + b = 10$.
Stąd $a^2 - 10a + 16 = 0$, czyli
$a_1 = 8$ i $b_1 = 2$ lub $a_2 = 2$ i $b_2 = 8$.

Przyjmijmy $a > b$, czyli $a = 8$ i $b = 2$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED otrzymujemy: $d^2 = 25 + 16 = 41$, czyli $d = \sqrt{41}$.
Okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest również okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Pole tego trójkąta jest równe $\frac{ah}{2} = 16$. Ze wzoru na pole trójkąta $\frac{acd}{4R} = 16$, czyli $R = \frac{5\sqrt{41}}{8}$.

Punktacja:
1 – wyznacza h za pomocą a i b,
2 – wyznacza a i b,
2 – wyznacza R .

Zadanie 9 (0-5)

R 3.9 Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną,

P 10.3 Uczeń oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Rozwiązujemy nierówność $|2x + 4| - |x| < 10$.
Dla $x < -2$:
$-2x - 4 + x < 10$, czyli $x > -14$. Zatem $-14 < x < -2$.
Dla $-2 \le x \le 0$:
$2x + 4 + x < 10$, czyli $x < 2$. Stąd $-2 \le x \le 0$.
Dla $x > 0$:
$2x + 4 - x < 10$, czyli $x < 6$. Stąd $0 < x < 6$.
Zatem $-14 < x < 6$.
Stąd wszystkimi całkowitymi rozwiązanami nierówności są liczby: $-13, -12, ..., 5$.
W celu obliczenia prawdopodobieństwa rozważmy model klasyczny. Niech Ω zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, A – zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest dodatnia. Kolejność wylosowania liczb nie ma znaczenia.

Zatem $|\Omega| = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$.

Zbiór A składa się zdarzeń elementarnych polegających na wylosowaniu dwóch liczb dodatnich, co możemy zrobić na $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ sposobów lub wylosowaniu liczb: –4 i 5, –3 i jednej z liczb 5 lub 4, –2 i jednej z liczb 5 lub 4 lub 3, –1 i jednej z liczb 5 lub 4 lub 3 lub 2, 0 i jednej z liczb 5 lub 4 lub 3 lub 2 lub 1.
Zatem $|A| = 10 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 25$.

Zatem $P(A) = \frac{25}{171}$.

Punktacja:
2 – rozwiązuje nierówność
2 – wyznacza liczebność zbioru A
1 – wyznacza prawdopodobieństwo

Zadanie 10 (0-7)

R 3.1 Uczeń stosuje wzory Viète'a,

R 3.2 Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;

R 3.7 Uczeń rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe;

R 3.8 Uczeń rozwiązuje proste nierówności wymierne

Aby równanie mogło mieć dokładnie dwa różne rzeczywiste rozwiązania współczynnik przy x^2 musi być różny od zera, czyli $m \neq 0$ oraz $\Delta > 0$, czyli
$m^2(m + 3)^2 - 4m(m + 3) > 0$,
$m(m + 3)(m^2 + 3m - 4) > 0$,
$m(m + 3)(m + 4)(m - 1) > 0$,
$m < -4$ lub $-3 < m < 0$ lub $m > 1$.

Ze wzorów Viete'a: suma pierwiastków równania jest równa $\frac{-m(m+3)}{m} = -(m+3)$ dla $m \neq 0$, iloczyn pierwiastków jest równy $\frac{m+3}{m}$ dla $m \neq 0$. Zatem

$-(m+3) > \frac{m+3}{m}$ dla $m \neq 0$

$\frac{(m+3) + m(m+3)}{m} < 0$

$(m + 3)(m + 1)m < 0$
$m < -3$ lub $-1 < m < 0$
Uwzględniając wszystkie warunki otrzymujemy: $m < -4$ lub $-1 < m < 0$.

Punktacja:
1 – uwzględnienie, że współczynnik przy x^2 różny od zera
2 – zapisanie i rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$
1 – wyznaczenie sumy i iloczynu pierwiastków w zależności od m
2 – rozwiązanie nierówności pomiędzy sumą a iloczyniem pierwistków równania
1 – podanie odpowiedzi.