MATEMATYKA
Przed próbną maturą. Sprawdzian 2. (poziom rozszerzony)
Rozwiązania zadań

Zadanie 1. (0-1)

P 1.6. Wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory dot. logarytmów

P 2.1. Używa wzorów skróconego mnożenia

$$\log_{36}^2 3 + \log_{36} 2 \cdot \log_{36} 18 = \log_{36}^2 3 + \log_{36} 2 \cdot \log_{36}(2 \cdot 9) = \log_{36}^2 3 + \log_{36} 2 \cdot (\log_{36} 2 + \log_{36} 9) =$$

$$\log_{36}^2 3 + \log_{36} 2 \cdot \log_{36} 9 + \log_{36}^2 2 = \log_{36}^2 3 + 2\log_{36} 2 \cdot \log_{36} 3 + \log_{36}^2 2 = (\log_{36} 3 + \log_{36} 2)^2 = (\log_{36} 6)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Odpowiedź: C

Zadanie 2. (0-1)

P 2.1 Używa wzorów skróconego mnożenia

R 11.1 Oblicza granice funkcji

$$\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1+3x(x+1)}{x^3+1}} = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+1}} = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{(x+1)(x^2-x+1)}} = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x^2-x+1)}} = \sqrt[3]{\frac{0}{3}} = 0$$

Odpowiedź: A

Zadanie 3. (0-2)

P 1.3 Posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia

P 2.1 Używa wzorów skróconego mnożenia

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2019}} = \frac{1-\sqrt{3}}{-2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2} + \ldots + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2019}}{-2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2019}}{-2} \approx \frac{1-44,933}{-2} \approx 21,966$$

2	1	9

Zadanie 4. (0-2)

P 6.4 Stosuje zależności między funkcjami trygonometrycznymi

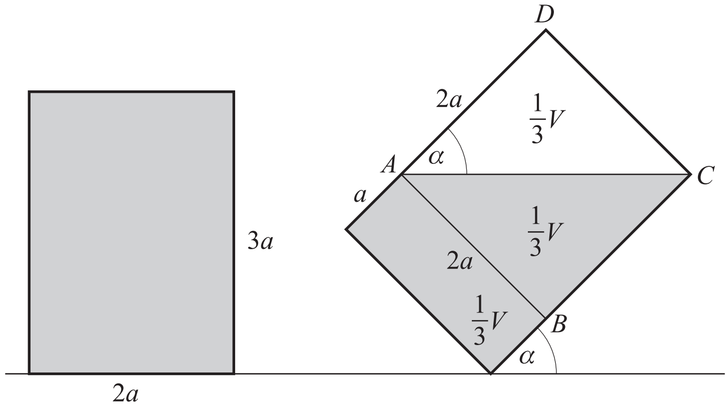
Mamy $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Dzieląc licznik i mianownik wyrażenia przez $\cos x$ otrzymamy:

$$\frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4} = 9 - 4\sqrt{5} \approx 0,055.$$

0	5	5

Zadanie 5. (0-3)

III. Modelowanie matematyczne



Łatwo zauważyć, że naczynie możemy „podzielić” na 2 walce: oba o średnicy $2a$, jeden o wysokości a i drugi $2a$, drugi ma objętość 2 razy większą niż pierwszy. Przekrojem pierwszego jest prostokąt, a drugiego kwadrat. Po przechyleniu i wylaniu $\frac{1}{3}$ objętości mamy sytuację jak na rysunku, a to oznacza, że naczynie pochylono pod kątem $\alpha = 45°$.

Punktacja:
1 pkt – sporządzi rysunek zgodny z warunkami zadania
2 pkt – zauważy, że *ABCD* jest kwadratem i objętości *ABC* i *ACD* są równe
3 pkt – wyznaczy kąt $\alpha = 45°$

Zadanie 6. (0-3)

V. Rozumowanie i argumentacja. Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz}$

$2x + 2y + 2z - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{xz} - 2\sqrt{yz} \geq 0$

$x - 2\sqrt{xy} + y + x - 2\sqrt{xz} + z + y - 2\sqrt{yz} + z \geq 0$

$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{z} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

Metodą przekształceń równoważnych otrzymaliśmy prawdziwą ostatnią nierówność (suma kwadratów dowolnych wyrażeń jest liczbą nieujemną), zatem pierwsza nierówność jest prawdziwa.

Punktacja:
3 pkt – poprawnie uzasadni prawdziwość nierówności

Zadanie 7. (0-3)

R 7.5 Znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, oraz
R – promień okręgu opisanego
r – promień okręgu wpisanego

Z twierdzenia cosinusów wyznaczamy długość boku a:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \sphericalangle B$

$49 = a^2 + 9 - 2a3 \cdot \cos 120°$

$49 = a^2 + 9 + 3a$

$a^2 + 3a - 40 = 0$

$a = 5,\ a = -8$

Zatem $a = 5$

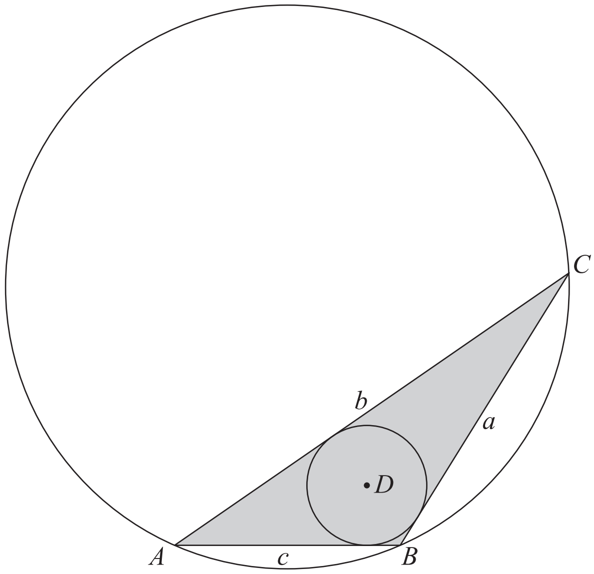
Pole trójkąta ABC

$$P = \frac{1}{2} ac \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

Korzystając ze wzorów $P = \dfrac{abc}{4R}$ i $P = \dfrac{a+b+c}{2} \cdot r$ wyznaczamy promienie R i r.

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4\frac{15\sqrt{3}}{4}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{3+5+7} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Stąd $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{14}{3} < 5$ co kończy dowód.

Punktacja:

1 pkt – wyznaczy długość trzeciego boku trójkąta $a = 5$

3 pkt – wyznaczy co najmniej jeden z promieni

5 pkt – wyznaczy szukany stosunek $\dfrac{R}{r} = \dfrac{14}{3} < 5$

Zadanie 8. (0-5)

R 11.2 Oblicza pochodne funkcji wymiernych

R 5.3 Rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy

Funkcja $f(x) = x + 1 + \dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x+1}{(x-2)^2} + ...$ ma postać szeregu geometrycznego.

Więc

$$q = \frac{1}{x-2}$$

$$|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x-2}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

a jej wzór $f(x) = S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{x+1}{1 - \frac{1}{x-2}} = \dfrac{x+1}{\frac{x-2-1}{x-2}} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-3}$

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 6:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$$

$$f'(6)=\frac{6^2-6\cdot 6+5}{(6-3)^2}=\frac{5}{9}$$

$$x_0=6,\ f(x_0)=\frac{28}{3}$$

Styczna:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$y-\frac{28}{3}=\frac{5}{9}(x-6)$$

$$y=\frac{5}{9}x+6$$

Punktacja:

1 pkt – zapisze wzór funkcji f

2 pkt – wyznaczy dziedzinę funkcji f

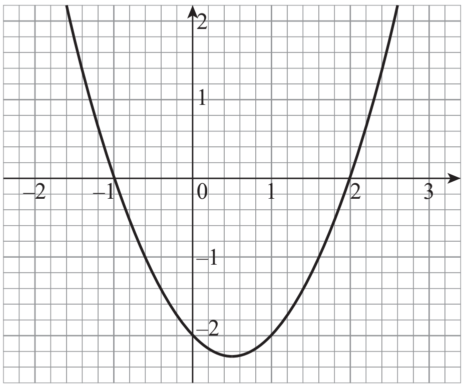
3 pkt – wyznaczy pochodną funkcji f

5 pkt – wyznaczy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 6

Zadanie 9. (0-5)

R 3.1 Stosuje wzory Viete'a

R 2.1 Używa wzorów skróconego mnożenia



(1) Równanie $x^2+2mx+m+2=0$ będzie miało rozwiązanie, jeśli $\Delta\ge 0$.

$\Delta=4m^2-4m-8\ge 0$

$m^2-m-2\ge 0$

$\Delta_m=1+8=9$

$m=-1,\quad m=2$

$m\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 2,\infty)$

(2) $$\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right)}{x_1+x_2}=x_1^2-x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2,$$

przy czym $x_1+x_2\ne 0$, czyli $m\ne 0$.

Korzystając z wzorów Viete'a:

$$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=\left(-\frac{2m}{1}\right)^2-3\frac{m+2}{1}=4m^2-3m-6$$

Z warunków zadania:

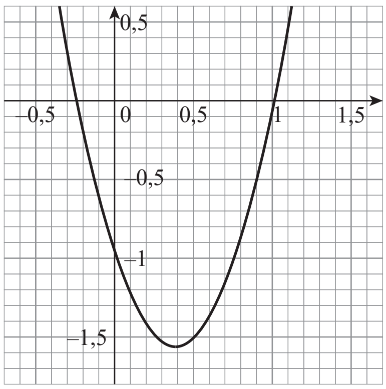
$4m^2-3m-6>-5$

$4m^2-3m-1>0$

$\Delta_m=9+16=25$

$$m=-\frac{1}{4},\ m=1$$

$$m\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(1,+\infty)$$



Z warunków (1) i (2) mamy:

$$\begin{cases} m\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 2,+\infty) \\ m\ne 0 \\ m\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

i ostatecznie $m\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 2,+\infty)$

Punktacja:
1 pkt – wyznaczy/rozwiąże warunek $\Delta \geq 0$

3 pkt – wykorzysta wzory skróconego mnożenia, wzory Viete'a i wyznaczy m spełniające warunek $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2} > -5$

5 pkt – wyznaczy m spełniające warunki zadania

Zadanie 10. (0-7)

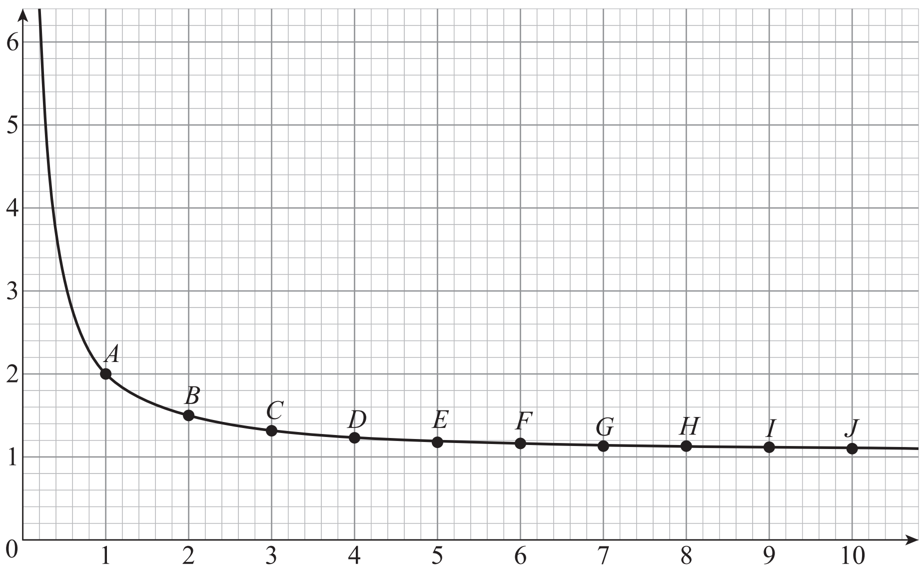
R 3.6 Rozwiązuje równania wielomianowe

P 4.13 Szkicuje wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

R 11.6 Stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych

Niech $a = n$, $b = n + 1$, $c = n + 2$, $d = n + 3$ gdzie $n > 0$
Przekształcając $f(x)$ otrzymamy:
$f(x) = ax^3 - bx^2 - cx + d = nx^3 - (n + 1)x^2 - (n + 2)x + n + 3 = nx^3 - nx^2 - x^2 - nx - 2x + n + 3$
$n(x^3 - x^2 - x + 1) - (x^2 + 2x - 3) = n[x^2(x - 1) - (x - 1)] - (x - 1)(x + 3) = n(x - 1)(x^2 - 1) - (x - 1)(x + 3) =$
$= (x - 1)[n(x^2 - 1) - (x + 3)] = (x - 1)(nx^2 - x - 3 - n)$

Wyznaczamy pierwiastki wielomianu:
$f(x) = (x - 1)(nx^2 - x - 3 - n) = 0$
$x_1 = 1$ $\Delta = 1 - 4n(-3 - n) = 4n^2 + 12n + 1 > 0$, bo $n \in \boldsymbol{N}$
$x_2 = \frac{1 - \sqrt{4n^2 + 12n + 1}}{2n}$, $x_3 = \frac{1 + \sqrt{4n^2 + 12n + 1}}{2n}$
A więc wielomian ma trzy pierwiastki.
Niech $f(n) = x_1 + x_2 + x_3$ będzie funkcją określającą wartość sumy pierwiastków funkcji $f(x)$ w zależności od n.
$f(n) = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \frac{1 - \sqrt{4n^2 + 12n + 1}}{2n} + \frac{1 + \sqrt{4n^2 + 12n + 1}}{2n} = 1 + \frac{2}{2n} = \frac{2n + 2}{2n} = \frac{n + 1}{n}$
Szukamy wartości największej tej funkcji. Możemy wykorzystać wykres tej funkcji.
$f(n) = \frac{n + 1}{n} = \frac{1}{n} + 1$ – funkcja homograficzna



Funkcja jest malejąca, jej argumentami są liczby naturalne.
Wartość tej funkcji jest największa – równa 2, dla argumentu $n = 1$.
Stąd suma pierwiastków jest największa dla $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

Uwaga!

Można wykorzystać monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n+1}{n}$ lub

rachunek pochodnych rozpatrując funkcję $f(x) = \frac{x+1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$.

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ i $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Pochodna jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ (także $f(n)$) jest malejąca, więc wartość największą osiąga dla $n = 1$ (czyli współczynniki wielomianu są równe $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$) i jest ona równa $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$

Punktacja:

1 pkt – uzależni współczynniki a, b, c, d i zapisze wielomian z n

3 pkt – przekształci funkcję do postaci iloczynowej

5 pkt – wyznaczy pierwiastki wielomianu

7 pkt – wyznaczy współczynniki wielomianu, dla których suma pierwiastków jest największa