# MATEMATYKA
# Przed próbną maturą. Sprawdzian 3. (poziom rozszerzony)
# Rozwiązania zadań

**Zadanie 1. Odpowiedź: B**

R.5.3. Rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Niech $q$ oznacza iloraz ciągu $(a_n)$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy $\frac{3}{1-q} = 9$,

czyli $q = \frac{2}{3}$.

Pierwszy wyraz ciągu $(a_{2n})$ jest równy 2 a iloraz $\frac{4}{9}$, czyli suma wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{2}{1-\frac{4}{9}} = 3,6$.

**Zadanie 2. Odpowiedź: B**

R 10.2 Oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.
$A$ – zdarzenie polegające na wyrzuceniu sumy oczek równej 5.
$B$ – zdarzenie, że wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych oczek jest równa 3.

$B = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$.
$A \cap B = \{(1, 4), (4, 1)\}$.

$$P(A \mid B) = \frac{A(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}.$$

**Zadanie 3. Odpowiedź 017**

R.9.2. Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

Niech $a$ oznacza długość krawędzi czworościanu. Zauważmy, że $AE$ i $BE$ są wysokościami trójkątów równobocznych, czyli $|AE| = |BE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wysokość trójkąta $ABE$ opuszczoną na bok $AB$: $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Zatem pole trójkąta $ABE$ wyraża się wzorem $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Ponieważ $\frac{a^2\sqrt{2}}{4} = 75\sqrt{2}$, czyli $a = 10\sqrt{3} = 17,32...$

**Zadanie 4. Odpowiedź 220**

R 10.1. Wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Mamy:
4 i 0 – **4**0..0 – 1 możliwość
3 i 1 – **1**0..3..0 – 9 możliwości (rozmieszczamy 3 na 9 miejscach, pozostałe 0)
**3**0..1..0 – 9 możliwości (rozmieszczamy 1 na 9 miejscach, pozostałe 0)
2 i 2 – **2**0..2..0 – 9 możliwości (rozmieszczamy 2 na 9 miejscach, pozostałe 0)
2, 1 i 1 – **2**01..1..0 – $C_9^2 = 36$ możliwości (rozmieszczamy 1 i 1 na 9 miejscach, pozostałe 0)
1, 2 i 1 – **1**02..1..0 – $V_9^2 = 72$ możliwości (rozmieszczamy 1 i 2 na 9 miejscach, pozostałe 0)
1, 1, 1, 1 – **1**01..1..1..0 – $C_9^3 = 84$ możliwości (rozmieszczamy 1 i 1 i 1 na 9 miejscach, pozostałe 0)
Zatem wszystkich liczb o tej własności jest 1 + 9 + 9 + 9 + 36 + 72 + 84 = 220.

**Zadanie 5.**

R.3.7. Uczeń rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

$x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 > 0$
$x^5 - 8x^2 - 4x^3 + 32 > 0$
$x^2(x^3 - 8) - 4(x^3 - 8) > 0$
$(x + 2)(x - 2)^2(x^2 + x + 4) > 0$

Odp: $-2 < x < 2$ lub $x > 2$

Inny sposób przekształcenia nierówności:
$x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 > 0$
$x^3(x^2 - 4) - 8(x^2 - 4) > 0$
$(x^2 - 4)(x^3 - 8) > 0$
$(x + 2)(x - 2)^2(x^2 + x + 4) > 0$

**Punktacja:**
1 – zamienia lewą stronę nierówności w postać iloczynową.
2 – podaje rozwiązania.

**Zadanie 6.**

R 3.9 Rozwiązuje równania z wartością bezwzględną.

$$\sqrt{1 + 9x^2 - 6x} - \sqrt{x^2 + 4 + 4x} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n - 1)(3n + 2)}{n^2 + 3n}$$

$|3x - 1| - |x + 2| = 3$

| $x < -2$ | $-2 \le x < \frac{1}{3}$ | $x \ge \frac{1}{3}$ |
|---|---|---|
| $-3x + 1 + x + 2 = 3$<br>$-2x = 0$<br>$x = 0$<br>sprzeczność | $-3x + 1 - x - 2 = 3$<br>$-4x = 4$<br>$x = -1 < 0$ | $3x - 1 - x - 2 = 3$<br>$2x = 6$<br>$x = 2 > 0$ |

Równanie ma dwa rozwiązania, z czego tylko jedno jest dodatnie, c.n.d.

**Punktacja:**
1 – przekształci równanie do równania z wartością bezwzględną i obliczy granicę.
1 – poprawnie rozwiąże dwa przypadki.
1 – poprawnie rozwiąże trzy przypadki i uzasadni tezę.

**Zadanie 7.**

R.11.2. Uczeń oblicza pochodne funkcji wymiernych.

R.11.4. Uczeń korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.

Wyznaczamy pochodną: $f'(x) = a - \dfrac{2bx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

Prosta $y = 2$ jest styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(1, f(1))$, więc $f'(1) = 0$.
i $f(1) = 2$. Stąd otrzymujemy układ równań: $a - \dfrac{b}{2} = 0$ oraz $a + \dfrac{b}{2} = 2$, czyli $a = 1$ i $b = 2$.

Ponieważ $f'(x) = 1 - \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ oraz $x^2 > x$ dla $x > 1$. Zatem dla $x > 1$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{\left(x^2 + 1\right)^2 - 4x}{\left(x^2 + 1\right)^2} > \frac{\left(x + 1\right)^2 - 4x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{\left(x - 1\right)^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} > 0$$

Stąd $y = f(x)$ jest funkcją rosnącą dla $x > 1$.

**Punktacja:**
1 – wyznaczenie pochodnej funkcji.
2 – wyznaczenie wartości $a$ i $b$.
2 – uzasadnienie, że funkcja jest rosnąca.

**Zadanie 8.**

R 11.2. Rozwiązuje równania wielomianowe.

P 5.4. Stosuje wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego.

Uwaga!
Przyjmujemy, że ciąg geometryczny tworzą współczynniki w kolejności 1, $a$, $b$, $c$, co nie ma wpływu na rozwiązanie zadania.

Jeśli liczba –3 jest pierwiastkiem wielomianu, to $W(-3) = 0$, czyli $-27 + 9a - 3b + c = 0$.

Jeśli współczynniki 1, $a$, $b$, $c$ tworzą ciąg geometryczny, to
$a_1 = 1$
$a_2 = a = q$
$a_3 = b = a^2$
$a_4 = c = a^3$

Podstawiając otrzymamy:
$-27 + 9a - 3a^2 + a^3 = 0$
$9(-3 + a) + a^2(-3 + a) = 0$
$(9 + a^2)(-3 + a) = 0$

Stąd $a = 3$ i kolejno $b = 9$, $c = 27$.

Zatem suma współczynników jest równa $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ i jest podzielna przez 8, c.n.d.

**Punktacja:**
1 – skorzysta z faktu, że –3 jest pierwiastkiem lub że 1, $a$, $b$, $c$ tworzą ciąg geometryczny.
2 – zapisze równanie z jedną niewiadomą pozwalające wyznaczyć $a$ ($q$).
2 – wyznaczy współczynniki i pokaże, że ich suma jest równa 40.

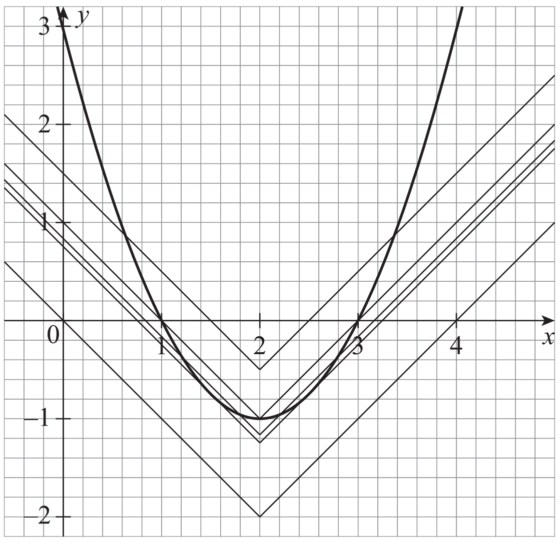
**Zadanie 9.**

R 3.3. Rozwiązuje równania kwadratowe z parametrem.

R 11.3. Korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.

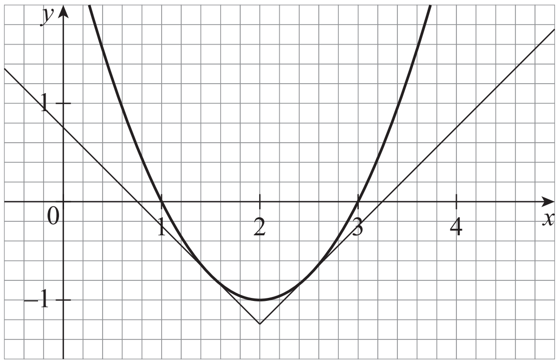
P 4.8. Szkicuje wykres funkcji kwadratowej.

Interpretacja graficzna:
A: $y = x^2 - 4x + 3$
B: $y = |x - 2| + m$




Krzywe mogą mieć 0, 2, 3 lub 4 punkty wspólne, czyli zbiór $A \cap B$ może być pusty, dwu-, trzy- lub czteroelementowy.

Zauważmy, że dla
$m = -1$ zbiór $A \cap B$ jest trzyelementowy.
$m > -1$ zbiór $A \cap B$ jest dwuelementowy.




Rozważmy sytuację, gdy krzywe są styczne.
Możemy rozwiązać układ równań
$y = x^2 - 4x + 3$
$y = |x - 2| + m$

(lub skorzystać z rachunku pochodnych)

Dla $x \geq 2$
$y = x^2 - 4x + 3$
$y = |x - 2| + m$
$x^2 - 4x + 3 = x - 2 + m$

Krzywe będą styczne, gdy układ (równanie kwadratowe) będzie miał jedno rozwiązanie.
$x^2 - 5x + 5 - m = 0$

$\Delta = 25 - 4(5 - m) = 5 + 4m = 0 \to m = -\frac{5}{4}$.

Analogicznie otrzymamy dla $x < 2$ (symetria wykresu), a to oznacza, że dla $m = -\frac{5}{4}$ krzywe mają dwa punkty wspólne.

Ostatecznie:
Zbiór $A \cap B$ jest:

a) pusty dla $m < -\frac{5}{4}$

b) dwuelementowy dla $m = -\frac{5}{4}$ lub $m > -1$

c) trzyelementowy dla $m = -1$

d) czteroelementowy dla $-\frac{5}{4} < m < -1$

**Punktacja:**
1 – wyznaczy graficznie zbiory $A$ i $B$.
2 – rozpatrzy przypadek krzywych stycznych.
2 – wyznaczy pozostałe przypadki.

**Zadanie 10.**

R.3.3. Uczeń rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych.

R.8.4. Uczeń oblicza odległość punktu od prostej.

R.8.5. Uczeń posługuje się równaniem okręgu.

Środek okręgu $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ jest punkt $O=(2, 1)$, a promień ma długość $r=\sqrt{5}$. Zauważmy, że środek okręgu leży na prostej $x-2y=0$, czyli $|AB|=2r=2\sqrt{5}$.
Niech $h$ oznacza wysokość opuszczoną na bok $AB$.
Skoro pole trójkąta $ABC$ jest równe 5, więc $\sqrt{5}h=5$, czyli $h=\sqrt{5}$.
Niech $C=(x, y)$. Odległość punktu $C$ od prostej $x-2y=0$ jest równe $\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, czyli $x=2y-5$ lub $x=2y+5$.
Punkt $C$ leży na okegu, więc jego współrzędne spełniają równanie $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.
Wstawiając do tego równania $x=2y-5$ dostajemy $(2y-7)^2+(y-1)^2=5$, czyli $y=3$ i $x=1$.
Wstawiając do równania okręgu $x=2y+5$ dostajemy $(2y+3)^2+(y-1)^2=5$, czyli $y=-1$ i $x=3$.
Zatem $C=(1, 3)$ lub $C=(3, -1)$.

**Punktacja**
1 – wyznaczenie długości boku $AB$.
2 – układa równanie z niewiadomymi $x$ i $y$.
1 – wyznaczenie obie zależności $x=2y-5$ lub $x=2y+5$ dla współrzędnych punktu $C$.
1 – zapisuje układy równań pozwalające wyznaczyć współrzędne punktu $C$.
2 – wyznaczenie współrzędnych punktu $C$.