

Zestaw D. Zadania otwarte

Zadanie 1. (4 pkt) CKE

Porównaj liczby a^b oraz b^a , gdzie $a = \left[(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right]^2$, $b = \frac{81^{-1} \cdot \sqrt{3}}{27^{-2} \cdot \sqrt[4]{9}}$.

Zadanie 2. (4 pkt)

Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ jest całkowita.

Zadanie 3. (5 pkt)

Uporządkuj rosnąco wartości a, b, c i d , jeżeli: $|1 + 3a| + \sqrt{2} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}^{\log_2 \frac{1}{9}}$,
 $c = \sin 390^\circ + \cos 540^\circ$, $d = \sqrt{12 - 8\sqrt{2}} - \frac{1}{2}|5 - 4\sqrt{2}|$.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE 2015

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.

Zadanie 5. (4 pkt)

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej k liczba $(k^3 + k^2)(k^2 + 3k + 2)(k + 2)$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 6. (3 pkt) CKE

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k + 1)(k + 9)(k^2 + 1)$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 7. (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zachodzi nierówność $\frac{9x^4 + 1}{x^2} \geq 6$.

Zadanie 8. (2 pkt) CKE

Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $ab \leq \frac{1}{4}$.

Zadanie 9. (3 pkt) CKE 2015

Wykaż, że jeżeli $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{2 + a^3} < \frac{b}{2 + b^3}$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność $|x - 2| + \sqrt{x^2 + 2x + 1} < 5$.

Zadanie 11. (4 pkt) CKE

Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 1| \leq 6$.

Zadanie 12. (4 pkt)

Dane jest równanie $|mx| + |m| = 4$, w którym x jest niewiadomą.

a) Rozwiąż równanie dla $m = 2$.

b) Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązania?