

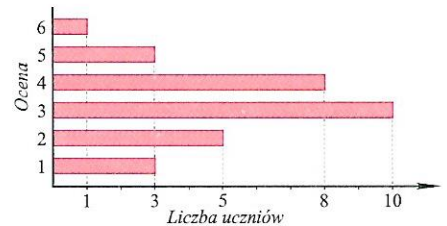
45. Wykorzystując równość $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, oblicz sumę
- a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}$; b) $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.
46. Znajdziemy ułamek zwykły, który ma rozwinięcie dziesiętne $0,(45)$.
- Oznaczmy $a = 0,454545\dots$. Zatem $100a = 45,454545\dots$.
 - Odejmując stronami otrzymujemy: $100a - a = 45,454545\dots - 0,454545\dots$.
 - Stąd $99a = 45$, czyli $a = \frac{45}{99}$. Ostatecznie, szukany ułamek jest równy $\frac{5}{11}$.
- W podobny sposób znajdź ułamek zwykły, który ma rozwinięcie dziesiętne
- a) $0,(5)$; b) $0,(27)$; c) $0,3(567)$.
47. Oblicz sumę a) $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}}$; b)* $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99+\sqrt{100}}}$.
48. R Rozstrzygnij, która z liczb jest większa, $\sqrt{2014} + \sqrt{2016}$ czy $2\sqrt{2015}$.
- 49.* (0–3) Wykaż, że prawdziwa jest równość $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2013
50. W Uzasadnij, że dla dowolnych różnych liczb a i b wyrażenie $\frac{|a-b|+|b-a|}{\sqrt{4a^2-8ab+4b^2}}$ ma stałą wartość.
51. Uzasadnij, że dla każdej liczby $x \in (-1; 5)$ wyrażenie $\sqrt{4x^2+12x+9} + 2\sqrt{x^2-12x+36}$ ma stałą wartość.
52. (0–2) Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.
CKE, matura – poziom podstawowy, maj 2012
53. Wykaż, że jeżeli dla różnych liczb a i b zachodzi równość $a^2+a = b^2+b$, to suma liczb a i b jest równa -1 .
54. R Wykaż, że jeśli liczby a i b są mniejsze od 1, to $ab+1 > a+b$.
55. Wykaż, że jeżeli $x^2y^2+z^2=2xyz$, to $z=xy$.
56. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^2+9b^2 \geq 6ab$.

57. (0–2) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2014
58. Wykaż, że $a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab-cd) \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d .
59. Wyznacz wszystkie pary liczb (x, y) spełniające równanie $2x(x+y+1)+y^2+1=0$.
60. Znajdź takie liczby rzeczywiste a i b , aby wyrażenie $10a^2+b^2+6ab+4a+1$ przyjmowało najmniejszą wartość.
61. R Wykaż, że jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
62. Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .
CKE, matura – poziom rozszerzony, sierpień 2010
63. (0–2) Uzasadnij, że jeśli $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2$, to $ad=bc$.
CKE, próbna matura – poziom podstawowy, listopad 2010
64. (0–3) Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2012
65. (0–2) Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.
CKE, matura – poziom podstawowy, maj 2011
66. (0–2) Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różną od zera i $a+\frac{1}{a}=3$, to $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.
CKE, matura – poziom podstawowy, sierpień 2013
67. Wykaż, że suma sześciątów dwóch różnych liczb dodatnich jest większa od iloczynu ich sumy i ich iloczynu.
68. Wykaż, że jeżeli różne od zera liczby a i b są tego samego znaku, to $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2$.
- 69.* (0–3) Uzasadnij, że jeżeli $2a+b \geq 0$, to $2a^3+b^3 \geq 3a^2b$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2013
70. W Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

- 71.** (0–3) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2014
- 72.* W** Wykaż, że jeśli $x + y + z = 0$, to $xy + yz + zx \leq 0$.
- 73.* R** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c takich, że $a + b + c = 3$ prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.
- 74.* W** Niech x i y będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, takimi że $x \geq y$. Wykaż, że zachodzi nierówność $x^4 + y^4 \geq 2xy^3$.
Egzamin wstępny na Uniwersytet Jagielloński (kierunki: matematyka i informatyka) w roku 1996

PROCENTY

- 75.** Na wykresie słupkowym przedstawiono wyniki ze sprawdzianu z matematyki przeprowadzonego w klasie III B.
- Ilu uczniów pisało sprawdzian?
 - Jaki procent uczniów uzyskało ze sprawdzianu ocenę co najmniej dobrą?
 - Oblicz, ilu uczniów liczy ta klasa, jeżeli wiadomo, że na sprawdzianie było nieobecnych 6,25% uczniów?



- 76.** Cena pewnego towaru wraz z 7% stawką podatku VAT była równa 64,20 złotych. Oblicz cenę tego towaru gdyby stawka podatku VAT była równa 22% zamiast 7%.
CKE, próbna matura – poziom podstawowy, wrzesień 2001 r.

- 77. R** Pan Nowak w lutym 2004 roku wpłacił 5000 zł na 6-miesięczną lokatę o rocznym oprocentowaniu 4,4%. Wiedząc, że w 2004 roku banki zobowiązane były do potrącania 19-procentowego podatku od odsetek, oblicz, o jaką kwotę powiększył się stan konta pana Nowaka po upływie 6 miesięcy od momentu założenia lokaty.

- 78.** Pan Neymar z bogatej oferty Banku Amazonia wybrał trzy roczne lokaty (patrz tabela) i na każdą z nich wpłacił po 2000 \$.

	Lokata HIT	Lokata GOLD	Lokata SUPER
Rodzaj oprocentowania	stałe	stałe	zmienne
Wysokość oprocentowania	6,2%	6,0%	6,6% *
Kapitalizacja odsetek	roczna	półroczna	roczna

* Oprocentowanie w dniu założenia lokaty.

Oblicz wysokość odsetek, naliczonych w ciągu roku od każdej z trzech lokat wiedząc, że po ośmiu miesiącach od dnia założenia lokat, bank obniżył oprocentowanie lokaty SUPER do 5,7%.

- 79.** Liceum Ogólnokształcące i Liceum Profilowane tworzą Zespół Szkół. Do Zespołu Szkół uczęszcza 875 uczniów, z czego 64% stanowią uczniowie LO. 55% uczniów LO i aż 80% uczniów LP to dziewczęta.
- Ilu chłopców uczęszcza do Zespołu Szkół?
 - Jaki procent uczniów Zespołu Szkół stanowią dziewczęta?
 - O ile procent liczba chłopców jest mniejsza od liczby dziewcząt w Zespole Szkół?