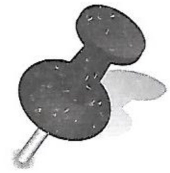
Logarytmy

„Wybrane wzory matematyczne"

– zestaw wzorów matematycznych przygotowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki obowiązującej od roku 2015.



Logarytmy

Logarytmem $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać c:

$$\log_a c = b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zmianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, $c \neq 1$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Logarytm $\log_{10} x$ można też zapisać jako $\log x$.

Zadanie 1. Oblicz argument, dla którego funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość

a) 8, b) 9, c) 10.

Zadanie 2. Funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 5 dla

A. $x = 15$. B. $x = 3^5$. C. $x = \log_3 5$. D. $x = \log_5 3$.

Zadanie 3. Funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = 4^x$ przyjmuje wartość 7 dla

A. $x = \log_4 7$. B. $x = 4^7$. C. $x = \log_7 4$. D. $x = \log_4 14$.

Zadanie:

Wykaż, że $\log^2_{15} 45 + \log^2_{15} 3 - 2\log_{15} 45 \cdot \log_{15} 3 = 1$.

Przykładowe rozwiązanie zadania

Lewa strona równania jest kwadratem różnicy liczb $\log_{15}45$ *i* $\log_{15}3$.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

oraz z twierdzenia o różnicy logarytmów o tej samej podstawie.

$$\log_a x - \log_a y = \log \frac{x}{y}$$

Przekształcamy lewą stronę równania.

$$L = (\log_{15}45 - \log_{15}3)^2 = (\log_{15} \tfrac{45}{3})^2 = (\log_{15}15)^2 = 1 = P$$

Zadanie

Oblicz a, jeżeli $\log_2 a = 3 + 2\log_2 4 - \frac{1}{2}\log_2 16$.

Przykładowe rozwiązanie zadania

Przekształcamy prawą stronę równości korzystając z twierdzeń o logarytmach.

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$
$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$
$$r\log_a x = \log_a x^r$$
$$\log_a a = 1$$

$$3 + 2\log_2 4 - \frac{1}{2}\log_2 16 = 3\log_2 2 + 2\log_2 4 - \frac{1}{2}\log_2 16 =$$
$$= \log_2 2^3 + \log_2 4^2 - \log_2 16^{\frac{1}{2}} = \log_2(2^3 \cdot 4^2) - \log_2 16^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \log_2 128 - \log_2 4 = \log_2 \frac{128}{4} = \log_2 32,$$

zatem

$\log_2 a = \log_2 32$, czyli $a = 32$

Zadanie 4. Oblicz.

a) $\log_3(9 \cdot 27)$

b) $\log(10 \cdot 1000)$

c) $\log_4 \frac{16}{64}$

d) $\log_2 \frac{1024}{64}$

e) $\log_7 7^7$

f) $\log_3 9^{12}$

g) $\log_4 2 + \log_4 8$

h) $\log_5 100 - \log_5 4$

i) $\log_2 12 + \log_2 10 - \log_2 15$

j) $2\log_4 3 - \log_4 18 + \log_4 32$

Zadanie 5. Oblicz a, jeżeli

a) $\log a = 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 64$,

b) $\log_3 a = 1 + 3\log_3 2 - \frac{1}{2}\log_3 25$.

Zadanie 6. Oblicz $\log_2\left(\frac{x^3}{a^2}\right)$, jeżeli wiadomo, że $\log_2 x^6 = 11$ i $\log_2 a^4 = 8$.

Zadanie 7. Oblicz

a) $3\log_2 3 + \log_2 5$,

b) $2\log_3 12 - 4\log_3 2$.

Zadanie 8. Oblicz wartość liczbową wyrażenia $a^{-4}\, b^{-1}$, jeżeli $\log a = 2$ i $\log b = -5$.

Zadanie 9. Oblicz $\log\sqrt{abc}$, jeżeli $\log a = \frac{1}{4}$, $\log b = 2$ i $\log c = \frac{1}{2}$.

Zadanie 10. Uzasadnij, że $\log_3 7 = \log_9 49$.

ODPOWIEDZI

1. a) $x = 3$ b) $x = \log_2 9$ c) $x = \log_2 10$

2. C **3.** A

4. a) 5 b) 4 c) -1 d) 4
e) 7 f) 24 g) 2 h) 2
i) 3 j) 2

5. a) 1,125 b) 4,8

6. 1,5 **7.** a) $\log_2 135$ b) 2

8. $\frac{1}{1000}$

9. $1\frac{3}{8}$