

Opis wymagań szczegółowych na poziomie podstawowym

Uczeń:

1. wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2. bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
3. stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
4. stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

„Wybrane wzory matematyczne”

– zestaw wzorów matematycznych przygotowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki obowiązującej od roku 2015.



Ciągi

• Ciąg arytmetyczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

• Ciąg geometryczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

Zadanie

Maturzysta przygotowując się do matury pierwszego dnia rozwiązał jedno zadanie, a każdego następnego dnia 3 razy więcej niż poprzedniego dnia. Każde zadanie rozwiązywał w ciągu 10 minut.

- a) W ciągu ilu dni rozwiąże 121 zadań?
b) Ile czasu poświęcił na rozwiązanie zadań czwartego dnia?

Przykładowe rozwiązanie zadania a)

Z treści zadania: $a_1 = 1$, $q = 3$, suma ciągu geometrycznego = 121

Rozwiązując zadanie należy skorzystać ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.



$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

oznaczenie

n – liczba dni potrzebna na rozwiązanie 121 zadań

$$S_n = \frac{1 \cdot (1 - 3^n)}{1 - 3} = 121$$

$$\frac{1 - 3^n}{-2} = 121, \text{ po przekształceniu } 3^n = 243$$

$$3^n = 3^5.$$

Korzystając z własności potęg otrzymujemy $n = 5$.

Odpowiedź: Maturzysta rozwiąże 121 zadań w ciągu 5 dni.

Przykładowe rozwiązanie zadania b)

Najpierw obliczymy, ile zadań rozwiąże maturzysta czwartego dnia, czyli a_4 .

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$a_4 = 1 \cdot 3^{4-1} = 3^3 = 27$ (czyli czwartego dnia rozwiązał 27 zadań).

$$27 \cdot 10 \text{ min} = 270 \text{ min} = 4,5 \text{ h}$$

Odpowiedź: Maturzysta czwartego dnia poświęci 4,5 h na rozwiązywanie zadań.



Zadanie 1. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n^2 - n}{4 - n}$ dla $n \geq 1$. Trzeci wyraz ciągu przyjmuje wartość

- A. 3. B. -3. C. 6. D. -6.

Zadanie 2. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2^n}{3n+1}$ dla $n \geq 1$. Piąty wyraz tego ciągu przyjmie wartość

- A. $\frac{10}{16}$. B. 2. C. 4. D. $\frac{1}{2}$.

Zadanie 3. Liczba wyrazów o wartości ujemnej ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = n^2 - n - 6$ dla $n \geq 1$ wynosi

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 2.

Zadanie 4. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 25$ dla $n \geq 1$?

Zadanie 5. Który wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = n^2 + 2$ dla $n \geq 1$ przyjmuje wartość 11?

Zadanie 6. Który wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{2-n}{n-8}$ dla $n \geq 1$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$?

Zadanie 7. Suma S_n początkowych wyrazów n pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest wyrażona wzorem $S_n = n^2 - 4n$. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu.

Zadanie 8. Suma S_n początkowych wyrazów n pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest wyrażona wzorem $S_n = 2n^2 + n$. Podaj wzór na wyraz a_n .

Zadanie 9. Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego i oblicz piętnasty wyraz tego ciągu.

- a) -11, -7, -3, 1 ... b) 4, 1, -2, -5, ...

Zadanie 10. Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego i oblicz sumę jego początkowych dwudziestu wyrazów, jeżeli $a_6 = 11$ i $a_{14} = -5$.

Zadanie 11. Oblicz sumę S_n dziesięciu początkowych wyrazów n ciągu arytmetycznego o różnicy 5 i pierwszym wyrazie równym (-9).





Zadanie 12. Dany jest ciąg 22 liczb, w którym pierwszy wyraz ma wartość 121. Każda następna liczba jest o 11 mniejsza. Ile jest liczb dodatnich w tym ciągu?

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

Zadanie 13. Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego o ilorazie (-2) , jeżeli jego czwarty wyraz ma wartość 8. Oblicz wartość ósmego wyrazu tego ciągu.

Zadanie 14. Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeżeli jego drugi wyraz ma wartość 6, a szósty 96.

Zadanie 15. Oblicz wartość szóstego wyrazu ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich wiedząc, że wyraz piąty ma wartość 25, a siódmy wartość 1.

Zadanie 16. Oblicz sumę S_n dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie (-2) i wyrazie pierwszym równym (-1) .

Zadanie 17. Dany jest ciąg sześciątów kolejnych liczb naturalnych 1, 8, 27, 64, Jednym z wyrazów tego ciągu jest 16^{18} . Kolejnym wyrazem tego ciągu jest liczba

A. 16^{19} .

B. $16^{18} + 1$.

C. $(16^6 + 1)^3$.

D. $(16^{18} + 1)^3$.

Zadanie 18. Suma n kolejnych liczb całkowitych, z których największa jest $n - 5$, wynosi

A. $n(n - 5)$.

B. $\frac{n(n-11)}{2}$.

C. $\frac{n(n-9)}{2}$.

D. $2n - 5$.

Zadanie 19. Znajdź ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz ma wartość 1 oraz suma czterech pierwszych wyrazów jest większa o $2\frac{2}{15}$ od sumy czterech następnych.

Zadanie 20. Długości boków trójkąta różnobocznego wyrażają się liczbami naturalnymi i tworzą ciąg arytmetyczny. Jakie są długości boków tego trójkąta, jeżeli jego obwód jest równy 12 cm?



ODPOWIEDZI

1. C

2. B

3. D

4. 4

5. 3

6. 4

7. 15

8. $a_n = 4n - 1$

9. a) $a_n = 4n - 15$ i $a_{15} = 45$

b) $a_n = 7 - 3n$ i $a_{15} = -38$

10. $a_n = 23 - 2n$ i $S_{20} = 40$

11. $S_{10} = 135$

12. A

13. $a_n = -(-2)^{n-1}$ i $a_8 = 128$

14. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

15. $a_6 = 5$

16. $S_{10} = 341$

17. C

18. C

19. $a_1 = 1, r = -\frac{2}{15}$

20. 3 cm, 4 cm, 5 cm