Zadanie 485.

Matura próbna I 2005 r., 7 p.

Dany jest ciąg liczbowy (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ określony dla dowolnej liczby $n \in N^+$.

a) Wykaż, korzystając z odpowiedniej definicji, że ciąg (a_n) jest rosnący.

b) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^6 + n}}{1 - a_n}$.

Zadanie 486.

Matura V 2005 r., 5 p.

Oblicz: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{5+7+9+\ldots+(2n+3)}$.

Zadanie 487.

Matura V 2007 r., 4 p.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem

$S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

Zadanie 488.

Matura VI 2012 r., 5 p.

W ciągu arytmetycznym (a_n), dla $n \geq 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 2012$.

Zadanie 489.

Matura próbna XI 2004 r., 7 p.

Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$, wiedząc, że $a_{51} = 1$.

Zadanie 490.

Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3 + 3n^2 - 7)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3 + 3n^4 - 7n^5)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n^3 + 3n^4 + 5n^5)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!}$

Zadanie 491.

Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 13^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 12^n + 112^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{10^{50}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{50}}} \right)$

Zadanie 492.

Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{31^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 3}{31^n + 3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 7}{(n-1)^3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{75} - 123n + 1}{-2n^{75} + 99n^{57} - 100}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 6}{n - 3}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12 - 3n + n^5}{4n^3}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - n + n^2 - 2n^3}{123n^4}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4 - 5n + 3}{n^5 - 3n^4 - 4n^3 - 5}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n - 3}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)}{n^2 - 5n}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{3n^3 + n - 15}$

(możesz wykorzystać wzór $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Zadanie 493.

Oblicz

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2-12}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+4}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{\sqrt{16n^2+4n+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+6}{\sqrt{n^4-12}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}}{-17n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{27n^6+1}}{4n^2-5n+1}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+\sqrt{n}}}{n}$

Zadanie 494.

Oblicz granice ciągów o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+1}$

b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

c) $a_n = 2n - \sqrt{3n+n^2}$

d) $a_n = \sqrt[3]{2+n^3} - n$

e) $a_n = n\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{n^3-5n}$

f) $a_n = \sqrt[3]{n^3-5n} - \sqrt[3]{n}$

Zadanie 495.

Dany jest ciąg o n-tym wyrazie $a_n = \dfrac{pn^2-12}{(p-1)n^2+n}$. Wyznacz wartość parametru $p \neq 1$ tak, by granica tego ciągu była równa 3.

Zadanie 496.

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym wyraz pierwszy jest równy 2, a suma wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy kwadratów wyrazów tego ciągu.

Zadanie 497.

Dane są cztery liczby a, b, c, d. Liczby a, b, c w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Liczby b, c, d w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Suma liczb skrajnych jest równa 16, suma środkowych 12. Wyznacz a, b, c i d.

Zadanie 498.

Wykaż, że ciąg o wyrazach: $a_1 = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 499.

Między liczby 20 i 0,002 wstaw trzy inne tak, by łącznie z danymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny o dodatnim ilorazie.

Zadanie 500.

Bolek i Lolek układają piramidę z kasztanów. W podstawie piramida ma kwadrat ułożony z 36 okrągłych nasion. Liczna nasion w każdym rzędzie kolejnej warstwy jest o 1 mniejsza niż poprzednio. Ile kasztanów potrzebują chłopcy do zbudowania takiej piramidy, by w ostatniej warstwie był jeden kasztan?

Zadanie 501.

Matura 2001 r.

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 12x^2 - 16x - 192$.

a) Wyznacz wzór na wyraz ogólny rosnącego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n), którego trzema początkowymi wyrazami są pierwiastki wielomianu W.

b) Oblicz, dla jakich n suma początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od sumy wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n), gdzie $b_n = 576 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Zadanie 502.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3. Suma początkowych sześciu wyrazów tego ciągu jest pięć razy większa od sumy trzech początkowych wyrazów ciągu. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu.

Zadanie 503.

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym wyraz pierwszy jest równy 4, a suma wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy kwadratów tych wyrazów.

Zadanie 504.

Matura próbna I 2009 r., 4 p.

Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta.

Zadanie 505.

Matura próbna III 2008 r., 5 p.

Długości boków trójkąta prostokątnego są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 506.

Matura próbna XII 2004 r., 6 p.

Iloczyn piątego i jedenastego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 4. Oblicz iloczyn piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 507.

Matura V 2009 r., 6 p.

Ciąg $(x-3,\ x+3,\ 6x+2, \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n-początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 508.

Matura V 2008 r., 3 p.

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

Zadanie 509.

Matura V 2011 r., 4 p.

O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$,

b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1.

Zadanie 510.

Matura V 2010 r., 5 p.

O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a+1,\ b+4,\ c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 511.

Matura V 2013 r., 5 p.

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+b+c=33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

Zadanie 512.

Matura V 2012 r., 6 p.

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Zadanie 513.

Matura V 2009 r., 5 p.

W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbca król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.

Zadanie 514.

Matura próbna III 2008 r., 5 p.

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz iloraz tego ciągu.

b) Oblicz $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \ldots + \log_3 a_{100}$, czyli sumę logarytmów o podstawie 3, stu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 515.

Matura próbna XII 2005 r., 5 p.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci:

$2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \ldots$. Wyznacz wszystkie wartości p, dla których granicą tego ciągu jest liczba:

a) 0,

b) 2.

Zadanie 516.

Matura V 2006 r., 7 p.

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

Zadanie 517.

Oblicz, dla jakich wartości parametru m równanie
$\cos x + 2\cos^2 x + 4\cos^3 x + \ldots = m^2 - 3$ ma rozwiązanie.

Zadanie 518.

Oblicz, dla jakich wartości parametru m równanie
$\cos x + 2\cos^2 x + 4\cos^3 x + \ldots = m + m^3 + m^5 + \ldots$ ma rozwiązanie, jeśli lewa i prawa strona równania są sumami odpowiednich szeregów geometrycznych.

Zadanie 519.

Oblicz, dla jakich wartości $x \in R$ suma szeregu geometrycznego
$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots$ jest równa 1.

Zadanie 520.

Oblicz wartość sumy $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} + \ldots$.

Zadanie 521.

Oblicz sumę: $\sqrt{3} + \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)^2 + \ldots + \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)^5$.

Zadanie 522.

Oblicz sumę: $1 + (\sqrt{3} - 2) + (\sqrt{3} - 2)^2 + \ldots$.

Zadanie 523.

Sprawdź, czy istnieje suma: $1 + (\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} + 2)^2 + \ldots$.

Zadanie 524.

Rozwiąż równanie $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \ldots = 1$.

Zadanie 525.

Matura V 2001 r.

Rozwiąż równanie $15\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \ldots\right) = \frac{8x^2}{x^2 - 1}$, wiedząc, że wyrażenie w nawiasie jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

Zadanie 526.

Matura V 2001 r.

Rozwiąż równanie $\log x + (\log x)^3 + (\log x)^5 + \ldots = \sqrt{2}$, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

Zadanie 527.

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{x-2}{3x+2}$ jest równa $S = \frac{3x+2}{2x+4}$. Określ, dla jakich wartości x ciąg ten jest zbieżny oraz oblicz jego pierwszy wyraz.

Zadanie 528.

Wyznacz wartości x, dla których istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{(x+2)^2} + \ldots + \frac{(x+1)^{n-1}}{(x+2)^n}\right]$. Oblicz tę granicę.

Zadanie 529.

Dany jest ciąg, którego wyrazy określone są wzorem $a_n = \frac{pn^2 - 1}{(p-1)n^2 + n}$.

Oblicz wartość parametru p tak, by $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Zadanie 530.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + \ldots$, sporządź wykres tej funkcji i oblicz jej miejsca zerowe.

Zadanie 531.

Oblicz wartość funkcji $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{(x^2-2)^2} - \frac{1}{(x^2-2)^3} + \ldots$ dla $x = 4$.

Zadanie 532.

Określ dziedzinę i oblicz miejsca zerowe funkcji

$f(x) = (x-2) + \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-2}{(x-5)^2} + \ldots$.

Zadanie 533.

Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{x}{(x-2)^2} + \frac{x}{(x-2)^3} + \ldots + \frac{x}{(x-2)^n} + \ldots.$$

Zadanie 534.

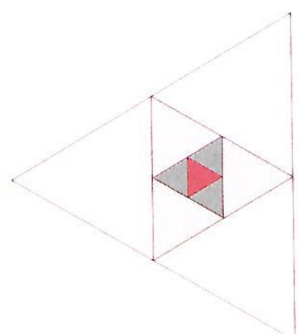
Oblicz wartość liczbową ułamka okresowego 0,(25)... .

Zadanie 535.

Przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego liczbę 0,2(10)... .

Zadanie 536.

W trójkąt równoboczny o boku długości 6 wpisany jest ciąg trójkątów w taki sposób, że wierzchołki kolejnego trójkąta są środkami boków poprzedniego (rysunek). Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów.



Zadanie 537.

Liczby 3, x, y są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, natomiast liczby 3, $x-6$, y tworzą ciąg geometryczny. Oblicz wartości x i y.

Zadanie 538.

Suma wyrazów o numerach nieparzystych nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 48, a o numerach parzystych jest równa 16. Wyznacz ten ciąg.

Zadanie 539.

Dziesiąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego równa się 10. Oblicz iloczyn dziewiętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 540.
Matura V 2001 r.

W ciągu arytmetycznym (a_n) suma dziewięciu początkowych wyrazów wynosi 0, natomiast szósty wyraz tego ciągu równa się 3.

a) Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n).

b) Ile wyrazów ciągu (a_n) jest ujemnych?

c) Wyznacz sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n), w którym $b_1 = a_9$ i $q = 0{,}1(3)$.

Zadanie 541.
Matura V 2001 r.

Suma czterech początkowych wyrazów rosnącego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) równa się 0, zaś suma kwadratów tych czterech wyrazów wynosi 80.

a) Wyznacz wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n).

b) Oblicz, dla jakich n suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od sumy wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 160 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Zadanie 542.
Matura V 2001 r.

Wyraz ogólny ciągu liczbowego (a_n) jest określony wzorem $a_n = \left(\frac{3-p}{3+p}\right)^{2n-3}$, $n \in N^+$.

a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których istnieje suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Wyznacz tę sumę.

c) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których ciąg (a_n) jest malejący.

Zadanie 543.
Matura V 2001 r.

a) Dla jakich wartości x wyrażenia $x-2$, x, x^2+x-2 tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny?

b) Wiedząc, że x, $x-6$, x^2+x+2 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego, zbadaj znak różnicy $S_{20} - S_{19}$ sum częściowych tego ciągu.

c) Dla jakich wartości x i y wyrażenia $x+y$, x^2, $y+2$ są trzema kolejnymi wyrazami zarówno ciągu arytmetycznego, jak i geometrycznego?