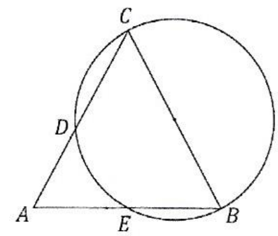
Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi



7.44. Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC|=|BC|=34$, $|AB|=32$. Zakreślono okrąg, którego średnicą jest bok *BC*. Okrąg ten przeciął boki *AC* i *AB* odpowiednio w punktach *D*, *E*. Wyznacz długości odcinków: *AD*, *DC*, *AE*, *EB*.

7.45. Rozpatrujemy trójkąty rozwartokątne, w których suma długości dwóch boków jest równa 12 cm, a cosinus kąta α między tymi bokami wynosi $\frac{-3}{8}$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta, który ma największe pole.

■ **7.46.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie *ABC* zachodzi następująca zależność między długościami boków a, b, c a miarami kątów trójkąta α, β, γ: $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}$.

7.47. Trójkąt *ABC*, w którym $|AC|=14$, $|BC|=30$, wpisano w okrąg o promieniu 25. Oblicz sinus kąta przy wierzchołku *C* i długość boku *AB*. Rozważ dwa przypadki.

■ **7.48.** W trójkącie *ABC* mamy dane: $|\angle C|=90^\circ$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Dwusieczna kąta *A* przecięła w punkcie *P* prostą prostopadłą do boku *AB* i przechodzącą przez punkt *B*. Wykaż, że odległość punktu *P* od boku *BC* jest równa $c-b$.

7.49. Dany jest równoległobok o bokach mających długość $a, b\ (a>b)$ i kącie ostrym α. Oblicz tangens kąta ostrego między przekątnymi tego równoległoboku.

■ **7.50.** Na bokach *AC* i *BC* trójkąta *ABC* zaznaczono odpowiednio punkt *D* i punkt *E* tak, że $|AD|=2|DC|$ oraz $|CE|:|EB|=1:2$. Wiadomo, że $|AE|=16$, $|BD|=12$ i $|DE|=5$. Wykaż, że odcinki *AE* i *BD* są do siebie prostopadłe.

7.51. Udowodnij twierdzenie: *W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołka trójkąta).*

7.52. W prostokącie *ABCD* przekątne przecinają się w punkcie *O*. Punkt *K* jest środkiem boku *BC*. Odcinek *DK* przecina przekątną *AC* w punkcie *M*. Oblicz, jaką część pola prostokąta *ABCD* stanowi pole czworokąta *OBKM*.

■ **7.53.** W trapezie *ABCD* suma miar kątów przy dłuższej podstawie *AB* jest równa 90°. Wykaż, że odcinek łączący środki podstaw trapezu ma długość $\frac{|AB|-|DC|}{2}$.

■ **7.54.** Wykaż, że odcinek łączący środki ramion trapezu o podstawach mających długość *a* i *b* jest równoległy do podstaw, a jego długość jest równa $\frac{a+b}{2}$.

7.55. Udowodnij twierdzenie: *W dowolnym trójkącie ABC, w którym półprosta* $CD^{\rightarrow}$, $D\in AB$, *jest dwusieczną kąta wewnętrznego tego trójkąta, prawdziwa jest równość* $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|DB|}$.

■ **7.56.** Prostokąt *ABCD*, $|AB|>|AD|$, podzielono prostą *k* równoległą do boku *AD* na dwa prostokąty podobne.

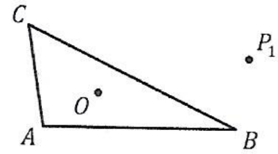
a) Wyznacz długości odcinków, na jakie prosta *k* podzieliła bok *AB*, jeśli $|AB|=10$, $|AD|=3$.

b) Wykaż, że prostokąt *ABCD* można podzielić w omówiony sposób na dwa prostokąty podobne, jeśli $|AB|\geq 2|AD|$.

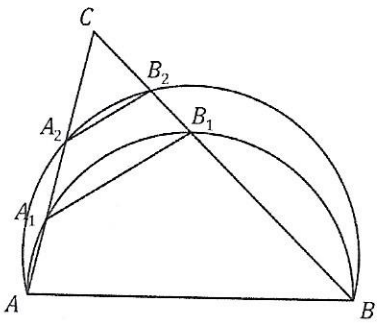
7.57. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość $2a$, promień zaś okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy r. Wyznacz – w zależności od a i r – wysokość w tym trójkącie poprowadzoną na podstawę AB.

7.58. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość $2a$, promień zaś okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R. Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną na podstawę AB.

7.59. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC, punkt O leży we wnętrzu trójkąta ABC i punkt P_1 leży poza tym trójkątem (zobaczy rysunek obok). Narysuj trójkąt $A_1B_1C_1$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie O, tak aby punkt P_1 należał do jednego z boków trójkąta $A_1B_1C_1$. Ile rozwiązań ma to zadanie?



■ **7.60.** Okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B trójkąta ABC przeciął boki AC i BC odpowiednio w punktach A_1 i B_1. Drugi okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B przeciął boki AC i BC odpowiednio w punktach A_2 i B_2. Wykaż, że $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.



■ **7.61.** Przez punkt S (nie leżący na danym okręgu o) poprowadzono dwie proste, które przecięły okrąg o w punktach A, B oraz A_1, B_1. Niech punkty P, P_1, R, R_1 oznaczają odpowiednio środki odcinków SA, SA_1, SB, SB_1. Wykaż, że na czworokącie o wierzchołkach P, P_1, R, R_1 można opisać okrąg. Rozpatrz dwa przypadki ze względu na położenie punktu S.

■ **7.62.** Na trójkącie ABC opisano okrąg. Z dowolnego punktu D okręgu (różnego od punktów A, B, C) poprowadzono proste prostopadłe do prostych AB, BC, AC i w przecięciu z nimi otrzymano punkty S_1, S_2, S_3. Wykaż, że punkty S_1, S_2, S_3 są współliniowe.

7.63. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg mamy dane długości boków: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|AD| = d$. Oblicz $\cos\alpha$, gdzie α jest kątem czworokąta przy wierzchołku A.

■ **7.64.** W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg mamy dane długości boków: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$. Wykaż, że:

a) $|AC| = \sqrt{\dfrac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$, $|BD| = \sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}$

b) $|AC| \cdot |BD| = ac + bd$.