

Opis wymagań szczegółowych na poziomie podstawowym

Uczeń:

1. wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° ;
2. korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
3. oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną, albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);
4. stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:

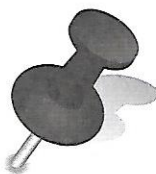
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{oraz} \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

5. znając wartość funkcji jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

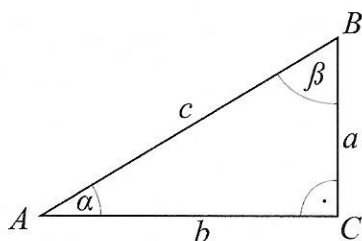
„Wybrane wzory matematyczne”

- zestaw wzorów matematycznych przygotowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki obowiązującej od roku 2015.

Trygonometria



- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

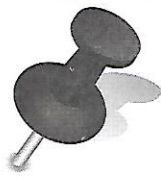
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k - \text{całkowite}$$



• Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

• Wybrane wzory redukcyjne

$$\begin{array}{ll} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \end{array}$$

Zadanie

Kąt α jest kątem rozwartym. Oblicz wartość liczbową wyrażenia $2(\cos^2 \alpha + \sin \alpha)$, jeżeli $\cos \alpha = 0,6$.

Przykładowe rozwiązanie zadania

$$\cos \alpha = 0,6 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 0,36$$

Korzystamy ze wzoru



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

i otrzymujemy równość $\sin^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$, czyli $\sin \alpha = 0,8$ (w drugiej ćwiartce sinus ma wartość dodatnią).

$$2(\cos^2 \alpha + \sin \alpha) = 2(0,36 + 0,8) = 2 \cdot 1,16 = 2,32$$

Odpowiedź: Wartość liczbowa wyrażenia jest równa 2,32.

Zadanie 1. Kąt α jest kątem rozwartym. Oblicz wartość liczbową wyrażenia

- a) $\sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha)$, jeżeli $\cos^2 \alpha = 0,64$,
 b) $3(9\operatorname{tg} \alpha + 3\operatorname{ctg}^2 \alpha)$, jeżeli $\operatorname{ctg}^2 \alpha = 0,81$.

Zadanie 2. Wartość $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$ jest równa

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. 1.

Zadanie 3. Wartość $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$ jest równa

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{4}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 0.

Zadanie 4. Wartość $\operatorname{tg} 40^\circ$ jest

- A. mniejsza od 1. B. większa od 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3} + 10$. D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 5. Wartość $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$ jest równa

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. D. $\sqrt{3}$.

Zadanie

Oblicz wartość wyrażenia $a = \cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.

Przykładowe rozwiązanie zadania

Korzystając ze wzorów redukcyjnych obliczamy wartość liczby a .



$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha\end{aligned}$

$$a = \cos(180^\circ - 30^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$$

Zadanie 6. Wartość $\cos 120^\circ$ jest równa

- A. $\cos 60^\circ$. B. $-\operatorname{tg} 30^\circ$. C. $\operatorname{tg} 60^\circ$. D. $-\sin 30^\circ$.

Zadanie 7. Wartość $\sin 150^\circ$ jest równa

- A. $\cos 60^\circ$. B. $-\cos 60^\circ$. C. $\operatorname{tg} 30^\circ$. D. $-\sin 30^\circ$.

Zadanie 8. Wartość $\sin 120^\circ + \cos 150^\circ$ jest równa

- A. $2\sqrt{3}$. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Zadanie 9. Wartość funkcji cosinus dla kąta ostrego α wynosi $\frac{3}{5}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

Zadanie 10. Wartość funkcji sinus dla kąta ostrego α wynosi $\frac{5}{13}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

Zadanie 11. Wartość funkcji cosinus dla kąta ostrego α wynosi $\frac{20}{29}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

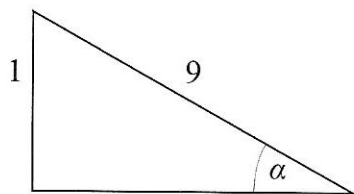
Wskazówka do zadań 12–14: Koniecznie sporządź rysunek pomocniczy.

Zadanie 12. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 i 8. Oblicz sinus mniejszego kąta ostrego oraz tangens większego kąta ostrego tego trójkąta.

Zadanie 13. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 9 i 3. Oblicz sumę wartości funkcji sinus i cosinus większego kąta ostrego tego trójkąta.

Zadanie 14. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 1 i 3. Oblicz sinus i tangens mniejszego kąta ostrego tego trójkąta.

Zadanie 15. W trójkącie prostokątnym, przedstawionym na rysunku poniżej, cosinus kąta ostrego α jest równy



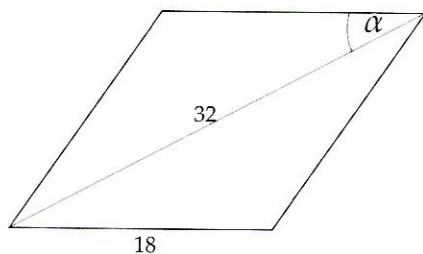
A. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 3.

Zadanie 16. W rombie zaznaczono kąt α i podano wielkości wybranych odcinków.



Prawdziwa jest zależność

A. $\sin \alpha = \frac{1}{9}$.

B. $\sin \alpha = \frac{8}{9}$.

C. $\cos \alpha = \frac{8}{9}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{9}$.

Zadanie 17. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Oblicz

a) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$,

b) $\frac{5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}$,

c) $\frac{4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{5 \sin \alpha + \cos \alpha}$.

Zadanie 18. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz

- a) $1 - \cos^2 \alpha$, e) $1 + \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$,
 b) $\cos^2 \alpha - 2$, f) $3 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha$,
 c) $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha$, g) $2 + 3\operatorname{tg}^2 \alpha$,
 d) $\operatorname{tg}^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha$, h) $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - 1$.

Zadanie 19. Oblicz

- a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$, b) $\cos^2 71^\circ + \cos^2 19^\circ$, c) $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ$.

Wskazówka: Wykorzystaj wzór redukcyjny $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Zadanie 20. Oblicz wartość wyrażenia $(5\sin 120^\circ - 3\cos 150^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ - 3)$.

Zadanie 21. Która z liczb x, y, z, w jest liczbą niewymierną?

$$x = 3\operatorname{tg} 45^\circ + 2\cos 150^\circ + 2\sin 120^\circ$$

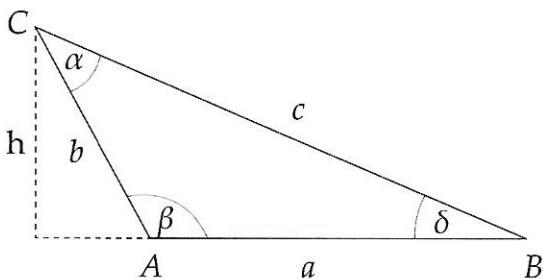
$$y = \sin 30^\circ - 2\cos 135^\circ$$

$$z = (\cos 30^\circ - \sin 150^\circ) \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} 45^\circ + \sin 60^\circ \right)$$

$$w = \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$$

- A. x B. y C. z D. w

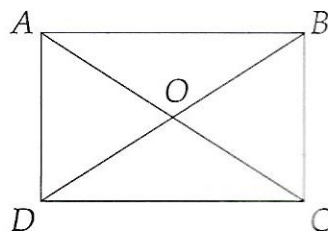
Zadanie 22. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC (rysunek) z dokładnością do 0,01, w którym $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 118^\circ$ oraz $h = 6,5$ cm.



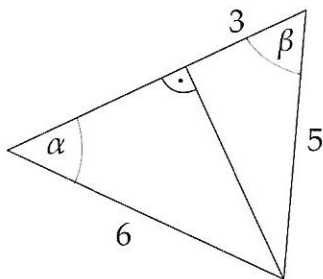
α	$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
62°	1,8807	0,8829	0,4695
42°	0,9004	0,6691	0,7314

Zadanie 23. W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 6 cm.

Oblicz odległość punktu A od przekątnej BD i pole tego prostokąta, jeżeli kąt między przekątnymi ma 120° .



Zadanie 24. Korzystając z rysunku, oblicz wartość liczbową wyrażenia $(\cos^2 \beta + 2 \sin \beta) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$.



Zadanie 25. Oblicz miary kątów trójkąta ABC wiedząc, że $|AC| = |BC| = 28$ cm oraz wysokość $|CD| = 14$ cm.

ODPOWIEDZI

- | | | | |
|--|---|--|--------------------------------------|
| 1. a) $-0,04$ | b) $-22,71$ | 2. A | 3. B |
| 4. A | 5. D | 6. D | 7. A |
| 8. B | 9. $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ | | |
| 10. $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ | 11. $\sin \alpha = \frac{21}{29}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{20}$ | | |
| 12. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = 2$ | 13. $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ | 14. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ | |
| 15. A | 16. C | 17. a) $\frac{1}{2}$ | b) $\frac{13}{3}$ c) $-\frac{5}{16}$ |
| 18. a) $\frac{16}{25}$ | b) $-\frac{41}{25}$ | c) $-\frac{11}{25}$ | d) $\frac{157}{225}$ |
| e) $\frac{9}{5}$ | f) $\frac{19}{5}$ | g) $\frac{22}{3}$ | h) $-\frac{1}{5}$ |
| 19. a) 1 | b) 1 | c) 1 | 20. $-16\sqrt{3}$ |
| 21. B | 22. $12,22 \text{ cm}^2; 20,83 \text{ cm}$ | 23. $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}; 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ | |
| 24. $\frac{196}{125}$ | 25. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ | | |