Wzory skróconego mnożenia, cz. 2

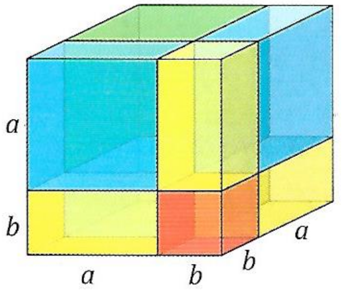
Przedstawimy w postaci sumy wyrażenie $(a+b)^3$. W obliczeniach wykorzystamy wzór na kwadrat sumy a i b.

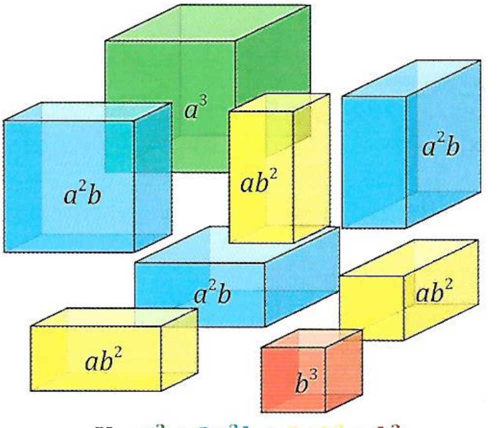
$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Otrzymaliśmy wzór na sześcian sumy:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to powyższy wzór możemy otrzymać, obliczając na dwa sposoby objętość sześcianu, którego krawędź ma długość $(a+b)$.





$\boldsymbol{V=(a+b)^3}$ $\boldsymbol{V=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Wyznaczymy wzór na sześcian różnicy a i b. Wykorzystamy do tego wzór na kwadrat różnicy a i b.

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3=$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Otrzymaliśmy wzór na sześcian różnicy:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Interpretacja geometryczna tego wzoru jest nieco bardziej skomplikowana i pominiemy ją.

Wykonamy teraz mnożenie $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$$

Otrzymaliśmy wzór na sumę sześcianów:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Analogicznie można wyprowadzić wzór na różnicę sześcianów:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (wzór na sześcian sumy a i b)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (wzór na sześcian różnicy a i b)

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (wzór na sumę sześcianów a i b)

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (wzór na różnicę sześcianów a i b)

Przykład 1.

$(\sqrt{2}+5)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 5 + 3\cdot(\sqrt{2})\cdot 5^2 + 5^3 = 2\sqrt{2} + 30 + 75\sqrt{2} + 125 = 77\sqrt{2} + 155$

$(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot y + 3\cdot 2x\cdot y^2 - y^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

$(4x-5)(16x^2 + 20x + 25) = (4x)^3 - 5^3 = 64x^3 - 125$

$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 2 + 3 = 5$

Przykład 2.

Usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\frac{2}{3-\sqrt[3]{5}}$.

Mnożymy licznik i mianownik ułamka przez liczbę $9 + 3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$, tak aby można było zastosować w mianowniku wzór na różnicę sześcianów:

$$\frac{2}{3-\sqrt[3]{5}} = \frac{2(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{(3-\sqrt[3]{5})(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})} = \frac{2(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{3^3-(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{27-5} =$$

$$= \frac{9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{11}$$

Przykład 3.

Wykażemy, że liczba $5^{18} - 1$ jest podzielna przez 31.

Liczbę $5^{18} - 1$ przedstawimy w postaci iloczynu liczb naturalnych. Dwukrotnie wykorzystamy wzór na różnicę sześcianów. Mamy zatem:

$$5^{18} - 1 = (5^6)^3 - 1^3 = (5^6 - 1)[(5^6)^2 + 5^6\cdot 1 + 1^2] = [(5^2)^3 - 1^3]\,(5^{12} + 5^6 + 1) =$$
$$= (5^2 - 1)[(5^2)^2 + 5^2\cdot 1 + 1^2]\,(5^{12} + 5^6 + 1) = 24\cdot 651\cdot(5^{12} + 5^6 + 1) =$$
$$= 24\cdot \underline{31}\cdot 21\cdot(5^{12} + 5^6 + 1)$$

Liczbę $5^{18} - 1$ można zapisać w postaci $31\cdot k$, gdzie $k \in \mathbf{N}$, a to znaczy, że dana liczba jest podzielna przez 31.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia:
   a) $(1-x)^3$ b) $(n+2)^3$ c) $(a+\sqrt[3]{2})(a^2 - \sqrt[3]{2}a + \sqrt[3]{4})$
2. Zamień na iloczyny wyrażenia:
   a) $x^3 + 216$ b) $t^3 + 15t^2 + 75t + 125$ c) $27 - 27a + 9a^2 - a^3$
3. Wykaż, że liczba $5^{12} - 4^{12}$ jest podzielna przez 41.

3.87. **3.87.** Wykaż, że podane liczby są liczbami całkowitymi:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}-\frac{12}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{2\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+3}-\sqrt{32\frac{2}{3}}$ d) $\frac{1}{3+\sqrt{6}}+\frac{1}{3-\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ f) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

3.88. Oblicz:

a) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ d) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$

3.89. Oblicz:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{28+6\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{29-4\sqrt{7}}$

e) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{57-12\sqrt{15}}$ f) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{10+4\sqrt{6}}$

3.90. Wykaż, że prawdziwe są równości:

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=1$ b) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}=1$

c) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2$ d) $\sqrt{18-8\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}=2$

Wzory skróconego mnożenia, cz. 2

3.91. Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia:

a) $(y+z)^3$ b) $(2+a)^3$ c) $(1+3x)^3$ d) $(\sqrt[3]{3}+1)^3$

e) $(5-b)^3$ f) $(x-4)^3$ g) $(2x-3)^3$ h) $(1-\sqrt[3]{2})^3$

3.92. Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia:

a) $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ b) $(3+x)(9-3x+x^2)$ c) $(y+4)(16-4y+y^2)$

d) $(2-y)(4+2y+y^2)$ e) $(25+5x+x^2)(x-5)$ f) $(\sqrt{2}-z)(z^2+2+\sqrt{2}z)$

3.93. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(x-1)^3+(2-x)^3$ b) $(2+x)^3+2(x-1)^3$

c) $(x+1)(x^2-x+1)+(1-x)^3$ d) $3(x-2)(x^2+2x+4)-(x+3)^3$

e) $(x+4)^3-(4-x)(x^2+4x+16)$ f) $(\sqrt[3]{5}+x)^3-(\sqrt[3]{5}-x)^3-6\sqrt[3]{25}x$

3.94. Sprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(x-1)^3-4(x+1)^2+(2-x)(4+2x+x^2)$

b) $(2+x)^3-0{,}25(4x-2)^2+(2-x)^3$

c) $2(3x-5)^2-(x+3)^3+3(x+1)(x^2-x+1)$

d) $(3-x)(x^2+3x+9)+(x-4)^3-12(x+2)^2$

3.95. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych:

a) $(x+1)^3-(2x-3)^2-(x+3)^2+2(x-2)(x+2)$

b) $(2x-5)^2(x-1)-(3x+1)^2(x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$

c) $(2x-1)^3-(x+1)^3+(x+2)^3-(x+2)(x^2-2x+4)$

d) $(2x-3y)^2-(3x-y)(3x+y)+(x-2y)^2-(8x-7y)(-2y)$

e) $(x^2-1)^3-(x-1)(x^2+1)(x+1)+4x^2(x^2+1)$

f) $(3x-1)^3-3(x+1)(x^2-x+1)+2(x-2)^3$

3.96. Rozłóż wyrażenia na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) y^3+8 b) $1-x^3$ c) $27x^3-1$

d) $8x^3-125$ e) $64+27y^3$ f) $125y^3+216$

3.97. Rozłóż wyrażenia na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) x^3-3x^2+3x-1 b) $x^3+18x^2+108x+216$

c) $27-27y+9y^2-y^3$ d) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

e) $1+6x+12x^2+8x^3$ f) $1-15y+75y^2-125y^3$

3.98. Rozłóż wyrażenia na czynniki co najwyżej drugiego stopnia.

a) x^4+216x b) $27x-8x^4$

c) x^6-64 d) $8-x^6$

e) x^6+2x^3+1 f) $64-16x^3+x^6$

g) $x^4+x^3-125x-125$ h) $x^4-x^3+27x-27$

3.99. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}-2}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2-\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ e) $\dfrac{11}{9-3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

3.100. Wykaż, nie korzystając z kalkulatora, że liczba:

a) 198^3+102^3 jest podzielna przez 300

b) 7^6+8^6 jest podzielna przez 113

c) $11^{12}-7^{12}$ jest podzielna przez 17

d) $17^{18}-16^{18}$ jest podzielna przez 11.