6 DOWODY Z WYKAZYWANIEM NIERÓWNOŚCI

W dowodach z nierównościami bardzo często będziemy opierali się na fakcie, że określone wyrażenie jest nieujemne.

TROCHĘ TEORII | WŁASNOŚĆ WYRAŻEŃ NIEUJEMNYCH

Zauważmy, że:

$5^2 \geq 0,$	ponieważ	$25 \geq 0$
$(-3)^2 \geq 0,$	ponieważ	$9 \geq 0$
$(\sqrt{2})^2 \geq 0,$	ponieważ	$2 \geq 0$
$0^2 \geq 0,$	ponieważ	$0 \geq 0$
$(2-\sqrt{2})^2 \geq 0,$	ponieważ	$(2-\sqrt{2})^2 \approx 0{,}35 \geq 0$

Oznacza to, że kwadrat sumy lub różnicy dowolnych liczb rzeczywistych jest wyrażeniem nieujemnym.

$$(x+y)^2 \geq 0 \quad (x-y)^2 \geq 0 \quad x,y \in \mathbb{R}$$

Wiele dowodów opiera się na tej zależności. Jednym z najbardziej podstawowych dowodów w wyrażeniach algebraicznych jest zależność:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+} x+\frac{1}{x} \geq 2$$

Udowodnimy tę zależność algebraicznie oraz wskażemy interpretację graficzną.

DOWÓD ALGEBRAICZNY

Wykaż, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ zachodzi zależność $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

$$x+\frac{1}{x} \geq 2 \quad |\cdot x \qquad (x>0\text{, więc znak nierówności nie zmienia się})$$
$$x^2+1 \geq 2x$$
$$x^2-2x+1 \geq 0$$
$$(x-1)^2 \geq 0$$

Kwadrat różnicy jest zawsze nieujemny: $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+} (x-1)^2 \geq 0$.

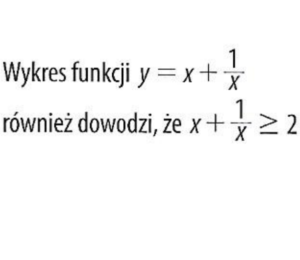
To bardzo ważna zależność, do której wielokrotnie będziemy się odwoływać.

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_+}$ — czytamy jako: „Dla każdego x ze zbioru liczb rzeczywistych dodatnich".

Analogicznie możemy zapisać: $\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}_+} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

Uogólniając, możemy podać twierdzenie, że suma dodatnich liczb odwrotnych jest większa bądź równa 2.

INTERPRETACJA GRAFICZNA



Wykres funkcji $y = x+\frac{1}{x}$ również dowodzi, że $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

DOWÓD 179 | P

Wykaż, że dla każdego a należącego do liczb rzeczywistych prawdziwa jest nierówność $a(a+3) \geq a-1$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wykonujemy mnożenie i porządkujemy nierówność.

$$a(a+3) \geq a-1$$
$$a^2+3a \geq a-1$$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

2° Otrzymane wyrażenie zapisujemy w postaci wzoru skróconego mnożenia — kwadratu sumy, który jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

$$a^2 + 3a - a + 1 \geq 0$$
$$a^2 + 2a + 1 \geq 0$$
$$(a+1)^2 \geq 0$$

DOWÓD 180 P Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+2}{a+1} \geq \frac{2a+2}{3}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Obie strony nierówności mnożymy przez $3(a+1)$ ($a > 0$, więc wyrażenie jest dodatnie i znak nierówności się nie zmienia) i porządkujemy nierówność, przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę.

$$\frac{a^2+2}{a+1} \geq \frac{2a+2}{3} \quad \Big| \cdot 3(a+1)$$
$$3(a^2+2) \geq (2a+2)(a+1)$$
$$3a^2 + 6 \geq 2a^2 + 2a + 2a + 2$$
$$3a^2 - 2a^2 - 2a - 2a + 6 - 2 \geq 0$$
$$a^2 - 4a + 4 \geq 0$$

2° Wyrażenie zapisujemy w postaci kwadratu różnicy, który jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa.

$$\bigwedge_{a>0} (a-2)^2 \geq 0$$

DOWÓD 181 P Udowodnij, że dla każdego a i b wyrażenie $a^4 \geq 3b(2a^2 - 3b)$ jest prawdziwe.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Opuszczamy nawias i porządkujemy.

$$a^4 \geq 6a^2b - 9b^2$$
$$a^4 - 6a^2b + 9b^2 \geq 0$$

2° Zapisujemy wyrażenie jako kwadrat różnicy, który jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa.

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} (a^2 - 3b)^2 \geq 0$$

DOWÓD 182 P Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Obie strony nierówności mnożymy przez 2.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \Big| \cdot 2$$
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

2° Dla każdego $a > 0$ i $b > 0$ nierówność jest spełniona, ponieważ otrzymaliśmy wyrażenie nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

TROCHĘ TEORII | ZALEŻNOŚCI MIĘDZY ŚREDNIMI

Dodatkowo udowodniliśmy powyżej, że średnia arytmetyczna dwóch liczb dodatnich jest zawsze większa bądź równa średniej geometrycznej tych liczb.

Oto ważniejsze zależności:

Zwróć uwagę na cztery różne średnie: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \text{ gdzie } a > 0,\ b > 0.$$

Inne zależności wynikające z powyższych nierówności: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

DOWÓD 183 R Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Obie strony nierówności podnosimy do kwadratu i porządkujemy, przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę.

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd} \quad \Big|^2$$
$$(a+b)(c+d) \geq ac + 2\sqrt{abcd} + bd$$
$$\cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} \geq \cancel{ac} + 2\sqrt{abcd} + \cancel{bd}$$
$$ad - 2\sqrt{abcd} + bc \geq 0$$

2° Wyrażenie zapisujemy jako kwadrat różnicy, który jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa.

$$\bigwedge_{a,b,c,d \in \mathbb{R}_+} (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$$

DOWÓD 184 R Udowodnij, że dla dowolnych liczb a i b nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest prawdziwa.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Podnosimy nierówność stronami do czwartej potęgi, porządkujemy, przenosząc wyrażenia na jedną stronę.

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \Big|^4$$
$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$$
$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4} \quad \Big| \cdot 4$$
$$2a^4+2b^4 \geq a^4+2a^2b^2+b^4$$
$$a^4-2a^2b^2+b^4 \geq 0$$

2° Wyrażenie przedstawiamy jako kwadrat różnicy, który jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa.

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} (a^2-b^2)^2 \geq 0$$

DOWÓD 185 P Wykaż, że nierówność $2x^2 - 6xy + 11y^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° W pierwszej kolejności zwracamy uwagę, który z wyrazów może być podwojonym iloczynem kwadratu sumy lub kwadratu różnicy. W tym przypadku podwojonym iloczynem jest $-6xy$.

2° Rozkładamy więc poszczególne wyrażenia tak, aby uzyskać kwadrat różnicy.

$$2x^2 - 6xy + 11y^2 \geq 0$$
$$x^2 + x^2 - 6xy + 9y^2 + 2y^2 \geq 0$$
$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-3y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0$$

3° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy sumę wyrażeń nieujemnych, która jest również nieujemna dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$, więc nierówność jest prawdziwa.

DOWÓD 186 P Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 - 6a + 2b + 11 > 0$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Przekształcamy lewą stronę nierówności w taki sposób, aby otrzymać kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

$$a^2 + b^2 - 6a + 2b + 11 > 0$$
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a^2 - 6a + 9}_{(a-3)^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\underbrace{b^2 + 2b + 1}_{(b+1)^2}}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0}}_{>0} > 0$$

2° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy sumę wyrażeń nieujemnych i liczby 1, więc wyrażenie jest większe od zera, a nierówność jest prawdziwa.

DOWÓD 187 R Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x(x-y) - y(1-y) \geq x - 1$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Opuszczamy nawiasy, a następnie mnożymy nierówność stronami przez 2.

$$x(x-y)-y(1-y)\geq x-1$$
$$x^2-xy-y+y^2\geq x-1 \quad |\cdot 2$$
$$2x^2-2xy-2y+2y^2\geq 2x-2$$

2° Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę nierówności.

$$2x^2-2x+2y^2-2y-2xy+2\geq 0$$

3° Rozkładamy i grupujemy wyrażenia tak, aby uzyskać trzy wzory skróconego mnożenia (kwadraty różnicy).

$$x^2+x^2-2x+y^2+y^2-2y-2xy+1+1\geq 0$$
$$\underbrace{x^2-2x+1}+\underbrace{y^2-2y+1}+\underbrace{x^2-2xy+y^2}\geq 0$$
$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\geq 0$$

4° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy sumę wyrażeń nieujemnych, która jest również nieujemna, więc nierówność jest prawdziwa.

DOWÓD 188 R Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność $x^4-x^2+4x+5\geq 0$ jest prawdziwa.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Rozkładamy lewą stronę nierówności tak, aby otrzymać dwa wzory skróconego mnożenia (kwadrat sumy i kwadrat różnicy).

2° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy sumę wyrażeń nieujemnych, więc nierówność jest prawdziwa.

$$x^4-x^2+4x+5\geq 0$$
$$x^4-2x^2+x^2+4x+4+1\geq 0$$
$$\underbrace{\underbrace{x^4-2x^2+1}_{(x^2-1)^2\geq 0}+\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2\geq 0}}_{\geq 0}\geq 0$$

DOWÓD 189 R Wiedząc, że $a+b\geq 0$, wykaż, że nierówność $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ jest prawdziwa.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Po lewej stronie nierówności korzystamy ze wzoru: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b)$$

2° Przenosimy wyrażenie z prawej strony na lewą, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias i redukujemy.

Uwaga! Nie możemy dzielić przez $(a+b)$, ponieważ wyrażenie może mieć wartość 0.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\geq 0$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)\geq 0$$
$$(a+b)(a^2-2ab+b^2)\geq 0$$
$$\underbrace{(a+b)}_{\geq 0}\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0}\geq 0$$

3° Otrzymaliśmy w drugim nawiasie kwadrat różnicy, który jest nieujemny. Wartość $a+b$ również jest nieujemna zgodnie z założeniem twierdzenia. Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa.

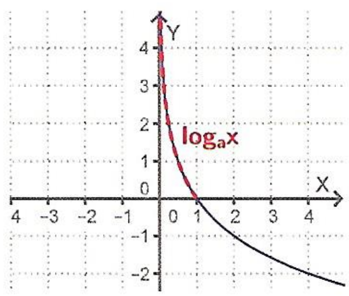
DOWÓD 190 R Wykaż, że nierówność $\log_a x+10+9\log_x a\geq 4$ jest prawdziwa dla każdego $a\in(0;1)$ i $x\in(0;1)$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru: $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ i porządkujemy nierówność.

$$\log_a x+6+\frac{9}{\log_a x}\geq 0$$

2° Korzystając z rysunku pomocniczego, można zauważyć, że jeśli $a\in(0;1)$ i $x\in(0;1)$, to $\log_a x$ jest dodatni, więc usuwamy mianownik, mnożąc nierówność stronami.



PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

$$\log_a x + 6 + \frac{9}{\log_a x} \geq 0 \quad \Big| \cdot \log_a x$$

$$\log_a^2 x + 6\log_a x + 9 \geq 0$$

3° Nierówność można przedstawić jako kwadrat sumy, który jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa.

$$\left(\log_a x + 3\right)^2 \geq 0$$

DOWÓD 191 **R** Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami dodatnimi oraz $ab = 1$, to $(a+3)(b+3) \geq 16$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyznaczamy $b = \frac{1}{a}$ i podstawiamy do lewej strony nierówności.

$$L = (a+3)(b+3) = (a+3)\left(\frac{1}{a}+3\right) =$$

2° Upraszczamy i redukujemy.

$$= 1 + 3a + \frac{3}{a} + 9 = 10 + 3a + \frac{3}{a} =$$

3° Z dwóch ostatnich wyrazów wyłączamy 3 przed nawias.

$$= 10 + 3\underbrace{\left(a + \frac{1}{a}\right)}_{\geq 2} \geq 16 = P$$

4° W nawiasie otrzymaliśmy sumę dodatnich liczb odwrotnych, która jest zawsze większa bądź równa 2.

5° Otrzymaliśmy wyrażenie większe bądź równe liczbie 16 znajdującej się po prawej stronie nierówności, więc nierówność jest prawdziwa.

DOWÓD 192 **R** Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ i $k = \frac{xy + yz + xz}{xyz}$ i $l = x + y + z$, to $k + l \geq 6$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Dodajemy liczby k i l, a następnie liczbę k rozkładamy na sumę ułamków.

$$k + l = \frac{xy + yz + xz}{xyz} + x + y + z =$$

2° Skracamy ułamki i porządkujemy wyrażenia według zmiennych.

$$= \frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}z} + \frac{\cancel{yz}}{x\cancel{yz}} + \frac{\cancel{xz}}{\cancel{x}y\cancel{z}} + x + y + z =$$

3° Otrzymaliśmy sumę trzech par dodatnich liczb odwrotnych. Każda z tych par jest większa bądź równa 2, więc ich suma jest większa bądź równa 6, czyli nierówność jest prawdziwa.

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + x + y + z = \underbrace{x + \frac{1}{x}}_{\geq 2} + \underbrace{y + \frac{1}{y}}_{\geq 2} + \underbrace{z + \frac{1}{z}}_{\geq 2} \geq 6$$

DOWÓD 193 **R** Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ wyrażenie $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Prowadzimy dowód od prawej do lewej strony nierówności. Wykonujemy mnożenie.

$$L = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 =$$

2° Uzyskaliśmy trzy pary dodatnich liczb odwrotnych. Każda z nich jest większa bądź równa 2, więc cała suma jest większa bądź równa 9, a nierówność jest prawdziwa.

$$= 3 + \underbrace{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{x}{z} + \frac{z}{x}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{y}{z} + \frac{z}{y}}_{\geq 2} \geq 9 = P$$

DOWÓD 194 **R** Uzasadnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie i $a + b + c = 2$, to $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4\frac{1}{2}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Mnożymy nierówność stronami przez $a + b + c$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4\frac{1}{2} \quad \Big| \cdot (a+b+c)$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 4\frac{1}{2} \cdot \underbrace{(a+b+c)}_{2}$$

2° Po prawej stronie nierówności zastępujemy sumę $a + b + c$ liczbą 2.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

3° Przekształcamy lewą stronę otrzymanej nierówności tak, aby uzyskać sumy odwrotności liczb dodatnich, które są zawsze większe bądź równe 2.

4° Otrzymana suma jest większa bądź równa 9, więc nierówność jest prawdziwa.

$$L = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 =$$

$$= 3 + \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}_{\geq 2} \geq 9 = P$$

DOWÓD 195 **R** Wykaż, że jeśli x, y, z są liczbami dodatnimi, to $(x+y)(z+y)(x+z) \geq 8xyz$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z zależności między średnią arytmetyczną a geometryczną dwóch liczb dodatnich: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Przekształcając tę zależność, otrzymujemy własność: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

2° Przeprowadzimy dowód od lewej do prawej strony nierówności, wykorzystując powyższą własność.

3° W wyniku przekształceń otrzymaliśmy wyrażenie większe bądź równe od wyrażenia po prawej stronie nierówności, więc nierówność jest prawdziwa.

$$L = \underbrace{(x+y)}_{\geq 2\sqrt{xy}}\underbrace{(z+y)}_{\geq 2\sqrt{zy}}\underbrace{(x+z)}_{\geq 2\sqrt{xz}} \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{zy} \cdot 2\sqrt{xz} = 8\sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz = P,$$

więc $L \geq P$

DOWÓD 196 **R** Udowodnij, że dla każdego $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Przeprowadzimy dowód od lewej do prawej strony nierówności. Korzystamy z zależności pomiędzy średnimi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2° Zamieniamy sumy $a + b$ i $c + d$ tak, aby uzyskać postać średnich arytmetycznych, które są większe (bądź równe) od średnich geometrycznych tych liczb.

3° Uzyskaliśmy średnią arytmetyczną liczb $\sqrt{ab}$ i $\sqrt{cd}$, więc ponownie możemy skorzystać z zależności pomiędzy średnimi.

4° Otrzymaliśmy pierwiastek kwadratowy iloczynu pierwiastków, który możemy zamienić na pierwiastek czwartego stopnia iloczynu liczb a, b, c, d, więc nierówność jest prawdziwa.

$$L = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\overbrace{\frac{a+b}{2}}^{\geq\sqrt{ab}} + \overbrace{\frac{c+d}{2}}^{\geq\sqrt{cd}}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd} = P,$$

więc $L \geq P$

DOWÓD 197 **R** Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b, gdzie $a \neq b$, nierówność $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} > \frac{1}{3}$ jest prawdziwa.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Sprawdzamy, czy wyrażenie w pierwszym mianowniku jest dodatnie.

$$a^2 + ab + b^2 > 0 \quad |\cdot 2$$

$$2a^2 + 2ab + 2b^2 > 0$$

2° Przedstawiamy wyrażenie w mianowniku jako sumę nieujemnych składników i dodatnich składników.

$$a^2 + a^2 + 2ab + b^2 + b^2 > 0$$

$$a^2 + (a+b)^2 + b^2 > 0$$

3° Wyrażenie jest większe od zera, ponieważ $a \neq b$, więc nawet jeśli jedna ze zmiennych jest równa zero, to druga z nich jest różna od zera.

4° Ustalenie, że pierwszy mianownik jest dodatni, pozwala nam uprościć nierówność, mnożąc ją stronami.

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} > \frac{1}{3} \quad \Big| \cdot 3(a^2 + ab + b^2)$$

5° Upraszczamy wyrażenie i przedstawiamy w postaci kwadratu różnicy.

$$3(a^2 - ab + b^2) > a^2 + ab + b^2$$

$$3a^2 - 3ab + 3b^2 - a^2 - ab - b^2 > 0$$

$$2a^2 - 4ab + 2b^2 > 0 \quad |: 2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

6° Otrzymaliśmy wyrażenie dodatnie, ponieważ $a \neq b$, więc nierówność jest prawdziwa.

$$(a-b)^2 > 0$$